

火災時の煙流動のシミュレーションに関する

実験的研究

1984.1.21.

I5570789

矢野 斉

ま え が き

本論文は、火災時の煙の挙動を予測し、防災設計に役立つ手段として、魅力的な手法と思われる大型計算機による数値解析について述べたものであり、辻本総氏が「火災時の煙流動に関する実験的研究」において行なった水平路における数値実験を斜路の場合に応用したものである。

火災による犠牲者の死因について調べてみると、ほとんどの場合、火そのものよりも煙が原因である。この煙の動きを何か理論的に、数学的、定量的にとらえられないものかと思い、そのことを指導教官の辻本先生に話したところ、一冊の論文を渡された。それが今述べた辻本総「火災時の煙流動に関する実験的研究」である。ところがそれを開いてみて驚いた。最初から最後まで複雑そうな長い式で占められていたからである。ここまでやるには、おそらくこれは修士論文か博士論文かと思っていたら、それが卒業論文であると聞かされて、またまた驚いた。(世の中にはスゴイヤツがいるものだ)と。この時点においてはまさか自分がそれと同じようなことをやるとは思ってもしなかったのである。ところが、すこし読んでみると、おそろしそうな長い式は、差分式である

ことがわかり、(これは何とかなるのではないか)と思
い取り組むことにしたのである(そう思ったのが甘い考
えで、この時点においては問題の所在すらまだよくわか
っていなかったようである。)

そんな訳で本論文は、辻本氏の論文を出発点としてい
るので、多くの部分が辻本氏の論文からの引用、あるい
はまとめで占められている。そうした章、節は、以下に
示すとうりである。

第I章、第1節、第2節

第II章、第1節～第3節

第III章、

第IV章、

第V章

以後、辻本氏の論文からの引用については、一部を除い
ては、いちいち触れないので、ご了承ください。

さて、大型電子計算機によるシミュレーションという
ことを最初に聞いた時、私は計算機の威力を過大評価し
次のような幻想を抱いていたのである。それは先ず、これ
から解析しようとするビルや地下街等の壁、床、天井、
階段等の位置を入力しておき、ある位置に火災の条件(
これも結構むずかしいのであるが)を入力すると、あと

は、大型計算機がすべての点における物理量を計算してくれて、ひと目でわかるように流線図等をグラフィックに出力してくれるものと思いきや、現段階ではまだ、とてもそんなところにはいていないようで、1つの比較的単純な空間において、境界条件、初期条件等をこのようにすると、又方程式をこのようにモデル化すると実際の流れとどの程度一致するのか、しないのかと言った作業を進めている段階にあるのである。モデル化、簡単化して近似式を用いなければならぬというのは、“乱流”という困難な問題があるからである。差分のメッシュをどんどん小さくして最小の乱流渦まで解析できるようにしてやれば理論的にはうまくいくはずであるが、現在の電算機の記憶容量や演算速度を考えると、とても困難であり経済的にも実用的な方法といえないのである。

もちろんこの研究の応用面での将来の目標は、例えば新しい建物を設計する場合、火災時の煙の挙動を予想し防災計画に用いるとか、あるいは、既存の建物の安全性を検討するためシミュレーションを行なうといったことに利用することにある(理論的な面では、流体力学における難問である乱流の解明というアカデミックな目標もある)本論文は、そのための一つのステップであると言

える。このような状況のなかで、本論文の位置としては、最初にも述べたように、辻本氏の水平路における数値実験を、例えば地下街から地上に出る階段のような、斜路の場合に応用したものの第1歩といえよう。流体力学、数値解析の勉強、プログラムの理解等に時間がかかってしまい肝心の境界条件等を変化させ、いろいろ数値実験を行ない検討を加えることができなかった。また実際の流れとの比較もできなかったので、本論文を讀まれた方々が、チームを組んで、模型実験と数値実験とを並行して行なって、この研究を継続して下さることを期待する次第である。

1980年3月.

目次

まえがき	i
第I章. 流体の基礎方程式の導入I (層流)	1
第1節. 流体の基礎方程式	2
第2節. 基礎方程式の無次元化	7
第3節. エネルギー方程式の解説	10
第II章. 流体の基礎方程式の導入II (乱流)	16
第1節. 乱流解析法	17
第2節. 2方程式モデル	20
2-1. 連続の式と運動方程式	20
2-2. ρ の輸送方程式	23
2-3. ϵ の輸送方程式	26
2-4. まとめ及び定数について	28
第3節. 2方程式モデルによる非等温乱流解析法	32
3-1. 火災気流の乱流解析に関して	32
3-2. 基礎方程式	33
3-3. 基礎方程式の無次元化	35
3-4. 計算手順を示すフローチャート	37
第4節. 2方程式モデルの斜路への応用	38
4-1. 斜路への応用に関して.	38

4-2. 基礎方程式	39
4-3. 基礎方程式の無次元化	45
第5節. 式の展開.	52
5-1. 平均操作の規則	52
5-2. 乱流エネルギー(ρ)の輸送方程式	53
5-3. エネルギー逸散率(ϵ)の輸送方程式	60
第Ⅲ章. 数値解析について	67
第1節. 数値解析とは	68
第2節. 偏微分係数の差分近似	70
第3節. 数値計算法.	72
3-1. 過渡法とMAC法.	73
第4節. MAC法.	75
第Ⅳ章. 差分近似式の作成	77
第1節. 斜路	78
1-1. 層流	78
1-2. 乱流	79
第Ⅴ章. プログラム解説	96
第1節. 序	97
第2節. プログラムの準備	98
2-1. セルの大きさ	98

2-2. 代表長さ、代表速度、代表温度差の設定	99
2-3. 無次元時間	101
2-4. その他の定数	102
第3節、初期条件と境界条件	103
3-1. 初期条件	103
3-2. 境界条件	103
第4節、プログラムで使用した記号について	104
4-1. 添字について	104
4-2. プログラムにおける記号の意味	106
4-3. フローチャートの説明	107
第5節、中心差分と風上差分	109
第Ⅵ章、実験結果及び考察	114
第1節、流線図	115
1-1. 数値実験結果	115
1-2. 考察	118
第2節、数値実験結果の有次元化	119
2-1. 数値実験結果	121
2-2. 考察	136
(1) 風速分布	136
(2) 温度分布	138
(3) 代表速度(V_0)に関して.	140

第3節. 境界条件.	142
3-1. 壁面の境界条件	142
(1) 温度 (TH)	142
(2) U, V, Q, E, ν について	143
3-2. 自由端の境界条件.	144
第4節. その他の考察	149
4-1. 圧縮性について	149
4-2. 定常解について	149
4-3. 今後の課題.	150
参考文献	152
あとがき.	155

第 I 章. 流体の基礎方程式の導入 I. (層流)

第1節 (1)

流体力学的に流体を把握するためには、任意の時間における、各点の流体の速度 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と、3つの物理量、たとえば、密度 ρ 、圧力 P 、温度 T が求まればよい。

流体の把握に必要な物理量

$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 速度 (3)

ρ 密度 (1) P 圧力 (1) T 温度 (1)

以上未知数 6 つ

これら 6 つの未知数を決定するためには、6 つの方程式が必要となる。

- 質量保存則 \longrightarrow 連続の方程式 (1)
- 運動量保存則 \longrightarrow 運動方程式 (3)
- エネルギー保存則 \longrightarrow エネルギー方程式 (1)
- ρ, P, T の関係 \longrightarrow 状態方程式 (1)

計 6 個
() は式の
個数

以上、質量、運動量、エネルギーの各保存則と、状態方程式の計 6 個の方程式が、6 つの未知数を求めるための基礎方程式となる。各方程式を以下に示す。なお添字は、総和規約を用いる。

連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1-1-1)$$

運動方程式 (Navier-Stokes の方程式)

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_j'}{\partial x_j'} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \quad (1-1-2)$$

ただし F_i ; 単位質量に働く外力.

エネルギー方程式

$$\rho C_p \frac{D T}{D t} - \frac{D p}{D t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi + \rho Q \quad (1-1-3)$$

$$\text{ただし } \frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Φ ; 散逸関数 (単位体積流体が単位時間に粘性で失うエネルギー)

$$\Phi = \mu \left(\frac{2}{3} I_e^2 - 4 I I_e \right)$$

$$\begin{cases} I_e = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} \\ I I_e = e_{22} e_{33} - e_{23} e_{32} + e_{33} e_{11} - e_{31} e_{13} + e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21} \end{cases}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) : \text{速度変形テンソル}$$

C_p : 定圧比熱 k : 熱伝導率

Q : 発熱量.

状態方程式

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1-1-4)$$

R: 気体定数

以上の基礎方程式に、以下のような仮定をし、方程式を簡単にする。

- 仮定: ① 圧縮性の影響は小さく、非圧縮と仮定する。
 ② 密度変化は、浮力を考えるときのみ考慮するといふ *Boussinesq's Approximation*⁽²⁾を用いる。
 ③ 粘性散逸、圧縮散逸、輻射等の発熱は無視。
 ④ 圧力は、過剰圧力(同じ高さの静止空気圧との差)をとる。

②の仮定より、状態方程式はすでに考えられたことになり、基礎方程式から除かれる。また、密度 ρ は、温度のみの関数 $\rho(T)$ として扱える。

以上のことをもとに、三次元で基礎方程式を書き下す。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-1-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - g\beta(\theta - \theta_0) \quad \dots(1-1-7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-9)$$

更に溶質濃度を考えに入れよう

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + q. \quad (1-1-10)$$

基礎方程式のこのような表現をアドベクティブフォーム
 といひ、Navier-Stokesの方程式は、その移流項部分を
 連続の式を用いて書きかえることができる。この表現法は、
 フラックスフォームといひ以下に示す。

フラックスフォームで示した Navier-Stokes 方程式。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1-1-13)$$

記号の意味

以上何のことわりもなく記号を用いてきたが、ここで記号の意味を述べておく。

座標軸

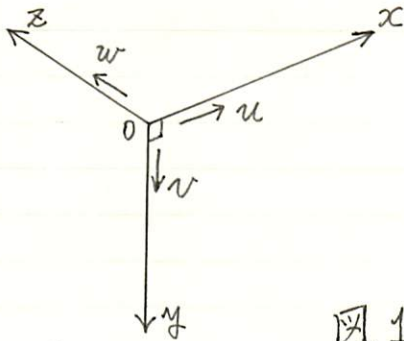


図.1-1.

記号

u, v, w	:	x, y, z 軸方向の速度	(cm/s)
t	:	時間	(cm/s)
P	:	過剰圧力	(g/cm ²)
θ	:	温度	(°C)
C	:	濃度	
q	:	発熱量	
ρ_0	:	基準状態の密度	(g/cm ³)
θ_0	:	温度	(°C)
ν	:	動粘性係数	(cm ² /sec)
a	:	温度拡散係数(温度伝導率)	(cm ² /sec)
D	:	分子拡散係数	(cm ² /sec)
β	:	体膨張率	(1/°C)
g	:	重力加速度	(cm/sec ²)

第2節基礎方程式の無次元化 (1)(3)

幾何学的な相似な物体のまわりの流れについて、力学的相似が成り立つための条件を考える。まず、いくつかの相似体について各々の基準になる長さを L_0 とすると、 L_0 を基準にした無次元長。

$$X = \frac{x}{L_0}, \quad Y = \frac{y}{L_0}, \quad Z = \frac{z}{L_0} \quad (1-2-1)$$

を用いると、比較すべき相似体は、皆1つの関数で共通に表わされる。その他の量についても同様に基準量として、

T_0 : 代表時間 ($= \frac{L_0}{U_0}$) (sec)

U_0 : " 速度 (cm/sec)

$\Delta\theta_0$: " 温度差 (deg)

C_0 : " 濃度

P_0 : " 圧力 ($= \rho_0 U_0^2$) (g/cm^2)

C_{p0} : " 定圧比熱

C_{v0} : " 定積 "

γ_0 : " 比熱の比

μ_0 : " 粘性係数

ν_0 : " 動粘性係数

k_0 : " 温度(熱)伝導率

をとり、無次元の変数。

$$\left. \begin{aligned}
 T &= \frac{t}{T_0} & P &= \frac{P}{P_0} \\
 U &= \frac{u}{U_0} & C &= \frac{c}{C_0} \\
 V &= \frac{v}{U_0} \\
 W &= \frac{w}{U_0} \\
 \Theta &= \frac{\theta - \theta_0}{\Delta \theta_0}
 \end{aligned} \right\} (1-2-2)$$

を導入し、これらを基礎方程式に代入する。

連続方程式

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1-2-3)$$

運動方程式

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial UV}{\partial Y} + \frac{\partial UW}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \quad (1-2-4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial VU}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} + \frac{\partial VW}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \Theta \quad (1-2-5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} + \frac{\partial UW}{\partial X} + \frac{\partial VW}{\partial Y} + \frac{\partial W^2}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \quad (1-2-6)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right) \quad (1-2-7)$$

溶質濃度の方程式

$$\frac{\partial C}{\partial T} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} + W \frac{\partial C}{\partial Z} = \frac{1}{Re Sc} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right) + Q \quad (1-2-8)$$

ただし

$$Re = \frac{U_0 L_0}{\nu_0}, \quad \left(\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0} \right); \text{ Reynolds 数} *$$

$$Gr = \frac{g \beta \Delta \theta_0 L_0^3}{\nu^2}; \text{ Grashof 数}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a}; \text{ Prandtl 数}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D}; \text{ Schmidt 数}$$

* Reynolds 数……粘性の影響を支配する相似パラメータでこの値を等しくしたいくつかの層流運動は相似を保つ。小さい模型 (L_0 小) で同じ状態 (摩擦、抵抗係数の同じ値) を得るためには、流速 U_0 を大きくするか、動粘性係数 ν_0 を小さくする。

これら Re, Gr, Pr, Sc の値が等しければ (いくつかの流れについて) 基礎関係式は、全く同形となるから結果も基準量を用いて無次元表示をすれば同じ値を得るはずである。

第3節. エネルギー方程式の解説

(1-1-3)のエネルギー方程式の導入について述べておく。
(4)

先ず、流体の内部に右図の
ように体積 $\Delta V = \delta x \delta y \delta z$ なる小
さい直方体を考える。

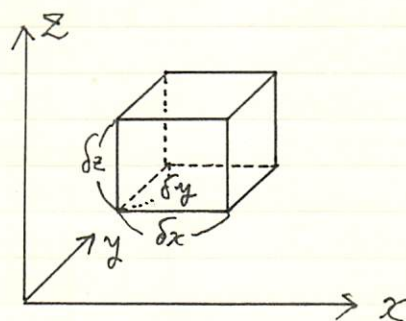


図. 1-2.

ΔV 内の流体の質量は、

$$\Delta M = \rho \Delta V \quad \text{で与えられる。} (\rho: \text{密度})$$

熱力学の第1法則、則ちエネルギー保存の関係より、
 ΔV に外から熱伝導や摩擦により加えられる熱量 δQ は、

$$\delta Q = \Delta M \cdot \delta(C_v T) + p \cdot \delta(\Delta V) \quad (1-3-1)$$

となる。ただし、この式で、第一項は、内部エネルギー
の増加を表わし、 C_v : 定積比熱、 T : 絶対温度である。

第二項は、膨張仕事に変えられる分である。 p : 圧力、
 $\delta(\Delta V)$ は体積の変化分である。

(1-3-1)がエネルギー方程式のもとの形であるが、以下
のようにして、粘性流体運動の内部構造に関係づけるこ
とができる。

δQ の内容は、熱伝導による分 δQ_c と摩擦による分 δQ_f
の和となる。

$$\delta Q = \delta Q_c + \delta Q_f \quad (1-3-2)$$

いま x なる断面 (面積 $\delta y \delta z$)

を通り伝えられる熱量は、

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \delta y \delta z \delta t$$

$x + \delta x$ なる断面を通して

外へ伝えられる熱量は

$$- \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x \right] \delta y \delta z \delta t$$

差し引き伝えられる熱量は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t$$

y, z 方向にも同様に考えられるから、 x, y, z 成分を合わせると、

$$\delta Q_c = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} \Delta V \delta t \quad (1-3-3)$$

摩擦により伝えられる熱エネルギーは、摩擦応力が ΔV に対してなす仕事の中、機械的エネルギーに変えられたものを差し引いた残りがそれである。摩擦応力が ΔV に対してなす仕事は、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x^* u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u + \sigma_y^* v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \sigma_z^* w) \right\} \quad (1-3-4)$$

$$\text{ただし } \sigma^* = \sigma + p$$

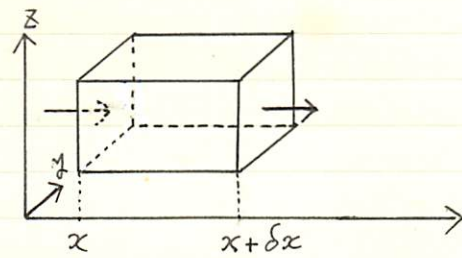


図. 1-3

機械的エネルギー（圧力と運動のエネルギー）の単位体積単位時間当りの増加量は、運動方程式の各成分に、 u, v, w をかけて加えれば、

$$u \frac{Du}{Dt} = uX + \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$v \frac{Dv}{Dt} = vY + \frac{v}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$+) \quad w \frac{Dw}{Dt} = wZ + \frac{w}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} u \frac{Du}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} + w \frac{Dw}{Dt} &= uX + vY + wZ + \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{v}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{w}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right\} &= u \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (-p + \sigma_x^*) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right\} \\ &\quad + v \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (-p + \sigma_y^*) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right\} \\ &\quad + w \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (-p + \sigma_z^*) \right\} \end{aligned}$$

(\because 摩擦応力の仕事を考えるから $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ とした)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) + p \right\} &= u \left(\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ &\quad + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ &\quad + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} \right) \quad (1-3-5) \end{aligned}$$

δQ_f は [式(1-3-4) - 式(1-3-5)] $\times (\Delta V) \delta t$ で得られる。

$$\delta Q_f = \left\{ \left(\sigma_x^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y^* \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \left(\tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} (\Delta V) \delta t \quad (1-3-6)$$

この σ, τ 等に応力と歪みの関係式。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (1-3-7)$$

を代入すると。

$$\delta Q_f = \Phi (\Delta V) \delta t \quad (1-3-8)$$

ただし、 Φ は逸散関数と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1-3-9)$$

これらを(1-3-1)式に代入すると。

$$\rho \frac{D(C_p T)}{Dt} + \rho \frac{1}{(\Delta V)} \frac{D(\Delta V)}{Dt} = \frac{1}{(\Delta V)} \frac{DQ_c}{Dt} + \Phi \quad (1-3-10)$$

$\frac{D(\Delta V)}{Dt}$ は ΔV が流れの方向で移動した場合の単位時間当り

の体積の変化である。図 1-3-3 に示すように始め δx だけ直方体の一辺は δt 後には $(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \delta t) \delta x$ になる。

したがって δt 後の容積は

$$(\Delta V) \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t \right]$$

となる。したがって

$$\frac{D(\Delta V)}{Dt} = (\Delta V) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

単位質量当りの内部エネルギー e についてみるエネルギー方程式は

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{D(C_v T)}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + H + \Phi. \quad (1-3-11)$$

ただし

$$H = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1-3-12)$$

で、熱伝導関数とよぶ。

連続の方程式によつて変形すると

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\rho D\rho}{Dt} = -\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (1-3-13)$$

となるから、内部エネルギーとエンタルピーの関係

$$c_p T = c_v T + \frac{p}{\rho} \quad (1-3-14)$$

を用いると、エンタルピーについて表わしたエネルギー

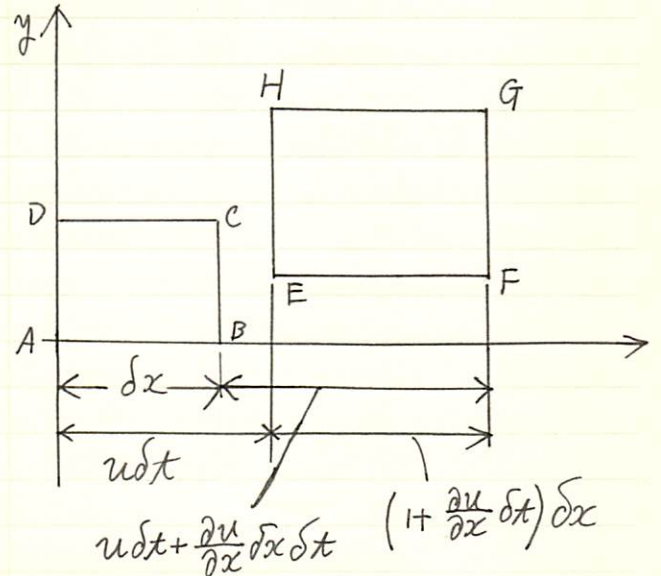


図. 1-4.

方程式が、

$$\rho \frac{D_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} (C_p T) = \frac{D\rho}{Dt} + H + \Phi. \quad (1-3-15)$$

もし、単位体積当り発熱量 Q があれば

$$\rho \frac{D_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} (C_p T) = \frac{D\rho}{Dt} + H + \Phi + Q \quad (1-3-16)$$

第Ⅱ章 流体の基礎方程式の導入Ⅱ (乱流)

第1節、乱流解析法^{注1)}

Navier-Stokes の方程式(以下 $N \cdot S$ 方程式と略す。)は乱流までをも記述しているはずであるが、 $N \cdot S$ 方程式だけで乱流を解析するには最小の乱流渦²⁾まで解析できるような微細な格子網を組まねばならないであろう。このような格子網を組むことは、現在の電子計算機の記憶容量や演算速度を考慮するととても困難であり、実用的な方法とは思われない。一方、速度や圧力等の従属変数を時間平均値と変動値に分け、方程式全体に時間平均の操作を施すという Reynolds 以来の伝統的な手法を発展させるとすれば、非線形な慣性項によって生じた未知な相関項を何重相関で打ち切るかという *closure problem* につきあたる。従ってこのような手法をとる限り、未知な相関項を無視したり近似するという乱流のモデル化は避けられない。このようなモデル化による乱流の解析法の研究は、近年かなり進歩していて、Launder-Spalding³⁾によって様々な乱流モデルが簡潔にまとめられている。以下、そのモデルの分類を示す。(詳しい説明が、参考文献(1),(5),(9)等に記載しているので、ここでは簡潔に記す。)

1) 代数モデル

速度勾配や壁からの距離等の代数式の形で理論的、

或いは半経験的に与えられる ν を用いる方法。境界層、噴流、後流等すでに ν の代数式が確立している流れには適用できず、一般的な乱流場には適さない。

2) 1方程式モデル

ν を乱流エネルギー ρ の平方根とエネルギーを含む乱流渦の長さスケール l との積で表わす。 l は代数的に与えるが l に関する知識が確立していない流れに対しては適当でない。

3) 2方程式モデル

$\epsilon = \rho^m l^m$ で表わされる量の輸送方程式を導き、それを解くことで l を代数的に与えるという1方程式モデルの欠点を補うモデル。

4) 多方程式モデル

ν を用いず、直接 Reynolds 応力の輸送方程式を導き、これに種々の近似を仮定し解く方法である。近似によるモデル化等非常に複雑なものである。

5) Smagorinsky・Deardorffモデル

格子スケールより小さなスケールでは一様等方性が成立すると仮定して、 ν を格子スケールより小さな渦による効果として、格子スケールで平均化された運動方程式を解析する方法で、格子スケールより大きな渦

は解析され、得られる解は非定常である。

本論文では、このうち(3)の2方程式モデルを用いて解析をした。またとしては $\rho^2 l^{-1}$ ($\alpha \in$: 粘性逸散率) を用いている。

注1) 本節は、野村豪, 松尾陽, 貝塚正光, 坂本雄三, 遠藤清尊: 室内空気分布の数値解法に関する研究, 日本建築学会論文報告集238号(1975) より引用, 要約したものである。

注2) 乱流の取扱いは、乱流を“渦”と表現したり、“波”といったりする。これは乱流が、静止している人から見ると、ただの流線しか見る(?)ことしかできないのであるが、流れの速度と同じ速度で運動する人から見ると、大小さまざまな渦が見られるからである。このことについては、参考文献(6)の、P.205 ~ P.206を参照されたい。

第2節.2 方程式モデル(1), (5), (8)~(10)

本論でとりあげる $g \cdot \epsilon$ タイプの2方程式モデルには、Launder・Spalding⁽⁷⁾が推奨しているモデルと、Harlow・Nakayama⁽¹¹⁾⁽¹³⁾らが提案したモデルの多少異なる2つのモデルがある。本論で採用したモデルは、前者に近いものであるが、厳密には、同じものではない。以下これを、ここでは、2方程式モデルと呼ぶことにする。

なお、最初の段階で、方程式を記述するにあたって、テンソル表示を用いた。(煩雑さを避けるため)従って、 i, j, k は、テンソルの添字であり、同じ項に同じ添字が現れるときは、その添字について、1から3までの総和をとる総和規約を用いている。

2-1. 連続の式と運動方程式.

従属変数に \sim を付けて表わすと、連続の式、Navier-Stokes の方程式は、

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-2-1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2-2-2)$$

である。(1), (2) の中の速度と圧力をすべて、

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i, \quad \tilde{p} = P + p \quad (2-2-3)$$

の如く、時間平均値と変動値に分け、方程式全体に対し

て時間平均の操作—を施すと、以下のような平均流に関する連続の式と運動方程式が得られる。

$$\boxed{\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0} \quad (2-2-4)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\overline{u_i u_j} + \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2-2-5)$$

右辺第2項が、Reynolds応力項。Reynolds応力は、平均流に対しては、乱流によって生じた応力と考えることができるので、分子粘性による応力と類推すれば、渦動粘性係数 ν_t を導入することによって、平均流 U_i の u ずみ率と結びつけることができる。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

とすると、両辺に縮約をとれば、

$$-\overline{u_i u_i} = \nu_t \cdot 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

となつて矛盾する。(∵ (2-2-4)より右辺は0となるが、左辺は、単位質量あたりのエネルギーに相当する次元を持つた量で常に正の値であるはずだから。)

よつて、Hinzeに従ひ、単位質量あたりの乱れの運動エネルギーの時間平均値(乱流エネルギー) $\rho = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ を用いて

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \quad (2-2-6)$$

の如く近似する。 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。

(2-2-5), (2-2-6)を代入して、更に(2-2-4)を利用して移流項をflux型に書きなおすと、

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_t + \nu) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2-2-8)$$

となる。ここで

$$\pi \equiv \frac{P}{\rho} + \frac{2}{3} \rho$$

であり、 $\frac{2}{3} \rho$ は乱流圧力と呼ばれている。

(2-2-2)と比較して、圧力に $\frac{2}{3} \rho$ 、動粘性係数に ν_t が加わった形となる。2方程式モデルでは(2-2-8)を運動方程式として用いる。本来渦動粘性係数はベクトル量と思われるが、スカラー量と仮定すると、Prandtl・Kolmogorovの仮定より、乱流速度 ν_t と乱流の長さスケール l との積で表わせる。

$$\nu_t = \nu_t l. \quad (2-2-10)$$

ν_t : 運動量の拡散に寄与する乱流渦の平均的な、回転速度

l : その平均的な径。

2方程式モデルでは、 $\nu = \nu_t l$ と(2-2-10)に代入して

$$\nu_t = \nu_t l \quad (2-2-10')$$

(2-2-10') より u_i を求める。 (L は定数も含む)

2-2. q の輸送方程式

(2-2-2) から (2-2-5) を引くと

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \quad \text{---- (2-2-11)}$$

が得られる。この式に u_i を乗じ、時間平均をとると、

q の輸送方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U_j \frac{\partial q}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + q' \right) u_j \right\} + \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad \text{---- (2-2-12)}$$

が得られる。但し、 $q' \equiv \frac{1}{2} u_i u_i$ である。

(2-2-12) は、時間平均を表わす一 のついた量が未知量なので、これらの量をすでに定義した従属変数やそれらの微分などで近似する必要がある。右辺第1項に対する近似。またあとで述べる ϵ を u_i と l に結びつける近似は、提案者によって乱流モデルが異なる。先ず **第1項** は、

1) Launder と Spalding による近似 (7)

q の乱流拡散と圧力変動による q の再配分を表すが、これを

$$-\left(\frac{p}{\rho} + q \right) u_j \approx \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial q}{\partial x_j} \quad \text{(2-2-13)}$$

のように勾配輸送の近似を行う。但し σ_t は定数である。

2) Harlow と Nakayama による近似 (11-13)

$\overline{\frac{p}{\rho} u_j}$ と $\overline{q' u_j}$ とは独立に勾配輸送の近似を用いて.

$$\overline{\frac{p}{\rho} u_j} \approx -\frac{\theta}{\gamma} \nu_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

(ただし, $\Phi = \frac{p}{\rho}$, θ, γ は 1 に近い定数)

$$\overline{q' u_j} \approx -\alpha \nu_t \frac{\partial q}{\partial x_j}$$

(ただし, α は 1 に近い定数)

第3項 q の生産を表す項.

$\overline{u_i u_j}$ をすでに仮定した近似 (2-2-6) で再び近似すると.

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \approx \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-2-14)$$

である.

第4項 分子粘性による q の逸散を表す項.

十分発達した乱流では粘性逸散に寄与する乱流渦は小さくほとんど等方的と考えられるから、この項は粘性逸散率 ϵ にほぼ等しくなる。(Harlowらはこの項を *energy decay rate* と呼んでいる。) なぜならば、第2項に含まれているもう一つの粘性逸散を表わす $\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}$ という項は一樣等方性が仮定できれば 0 になるからである。

従って.

$$\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \approx \epsilon \quad (2-2-15)$$

と近似してさしつかえない。(2-2-13)~(2-2-15)を代入し、
移流項を flux型に書きなおすと、(2-2-12)は結局

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} + \nu \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (2-2-16)$$

となる。

ϵ を ν_t と l に結びつける近似

1) Launder と Spalding による近似 (7)

十分発達した乱流では、周知の如く ϵ は高波数領域に
単位時間あたり伝達される乱流エネルギーにほぼ等しい
ので、

$$\epsilon \approx C_D \frac{\rho^{3/2}}{l} \left(= \frac{v_*^3}{l} \right) \quad (2-2-17)$$

と近似できる。但し、 C_D は定数である。(2-2-17)を(2-2-10)
に代入し、 l を消去すると、

$$\nu_t = C_D \frac{\rho^2}{\epsilon} \quad (2-2-18)$$

が得られる。

2) Harlow と Nakayama による近似 (11)~(13)

ϵ に対する近似は、粘性消散に寄与する乱流渦の長さ
スケール S を導入し、相対速度 U で流体中を動く球体 (
密度 ρ , 半径 R) に対する運動エネルギーの減衰率との
analogy として行なう。

$$\epsilon = \frac{2\nu \Delta q}{S^2} \quad (2-2-17')$$

$$\text{ただし } \Delta = \beta \left(1 + \delta \frac{\nu_t}{\nu}\right), \quad \beta = \frac{qS^2}{2R^2}, \quad \delta = \frac{3R}{8S\nu^{\frac{1}{2}}} \quad (2-2-17'')$$

$$\nu_t = (2Rq)^{\frac{1}{2}} S \quad (2-2-18')$$

(2-2-17')と(2-2-18')よりSを消去し $\nu_t > 0$ だから

$$\nu_t = \frac{\nu_0}{2} + \left\{ \left(\frac{\nu_0}{2}\right)^2 + \frac{\nu}{\delta} \nu_0 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-2-19')$$

$$\text{ただし, } \nu_0 = 4R\beta\delta \frac{q^2}{\epsilon}$$

2-3 ϵ の輸送方程式

(2-2-11)を x_k で微分し、 $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ を乗じた後時間平均をと
り、(2-2-15)の近似を用いると、 ϵ の輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -2\nu \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right] \quad (1)$$

$$+ \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (2)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \right\} \quad (3)$$

$$- 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) \quad (4)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\epsilon' u_j} \right) \quad (5)$$

$$+ \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6)$$

$$- 2\nu^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 \quad (7)$$

... (2-2-19)

が得られる。但し $\epsilon' \equiv \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$ である。この式も右辺の
 - のついた項に対してすでに定義した従属変数で近似する必要がある。

表2-1 各項の近似

項	Davidov の近似	Harlow と Nakayama の近似
①	直感的に無視	$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \left\{ \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) - \frac{1}{10} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right\}$ とし、右辺が "higher order" であるから無視した。
②	直感的に無視	$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -a_2 \frac{\Delta}{S^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu_* \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)$ a_2 は 0 に近い。
③	直感的に無視	$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) = -a_4 \frac{\Delta}{S^2} \nu_* \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ a_4 は 0 に近い
④	$2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \approx C_1 \frac{\epsilon}{\rho} \overline{u_i u_j}$ 但し C_1 は定数 ϵ の生産を表す	$2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = -2\nu a \frac{\Delta}{S^2} \nu_* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ (ϵ の生産項と考えた。)
⑤	$-\epsilon' u_j \approx \frac{\nu_*}{\sigma_2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}$ (均配輸送の逆側) 但し σ_2 は定数 ϵ の乱流拡散を表す。	$-\epsilon' u_j = -\frac{\nu_*}{\sigma_2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}$ σ_2 は 1 に近い定数
⑦	$2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \approx C_2 \frac{\epsilon^2}{\rho} = C_2 \frac{\rho \epsilon}{\nu_*}$ 但し C_1, C_2 は定数	$2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \approx 2\nu \frac{\Delta'}{S^2} \epsilon$ 但し、 $\Delta' = \beta' \left(1 + \delta' \frac{\nu_*}{\nu} \right)$ β', Δ' は定数

Laundor と Spalding は、Davidov が得た結果を用い、 ρ の輸送方程式に対して得た結果などと組み合わせて、彼らなりのモデルを作った。(S-L-D モデル)

④ に (2-2-6) を ⑦ に (2-2-18) を代入してから、これらの近似を適用すれば (2-2-19) は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_2} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{\epsilon}{\rho} \nu_t \left(\frac{\partial U_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\rho \epsilon}{\nu_t} \quad (2-2-20)$$

となる。但し $C_2 \equiv C C_0$ であり、移流項は (2-2-4) を利用し flux 型に直した。

Harlow と Nakayama のモデルは、H-N モデルと言う。

2-4 まとめ及び定数について (5)

結局、^{S-L-Dモデル} 用いるべき基礎方程式は \square で囲まれている (2-2-4), (2-2-8), (2-2-16), (2-2-18), (2-2-19) である。

最後にこのモデル (S-L-D モデル) で用いられている定数の値について Launder・Spalding に従い概説する。

σ_1, σ_2 は実験より

$$\sigma_1 \approx 1.0, \quad \sigma_2 \approx 1.3$$

という値が提案されている。 C_0 については (2-2-16) を平板乱流境界層に適用し、 $-\overline{u_1 u_2}$ と ρ を測定することによって決定され、

$$C_0 \approx 0.09. \quad (2-2-21)$$

が推奨されている。更に、(2-2-20) も平板乱流境界層に適用すると、

$$C_1 = \frac{C_2}{C_0} - \frac{\kappa^2}{\sigma_2 C_0^{1/2}} \quad (2-2-22)$$

という関係が得られる。但し、 κ は von Karman 定数である。一方格子背後の乱流に (2-2-16) と (2-2-20) を

適用し、 $E \propto x_1^{-2}$ という実験式を用いると、

$$C_2 = 2 C_0 \quad (2-2-23)$$

という関係を得る。従って (2-2-23) に (2-2-21) を代入すると

$$C_2 \approx 0.18 \quad (2-2-24)$$

が、(2-2-22) に (2-2-21), (2-2-22), (2-2-23) 及び $K=0.4$ を代入すると、

$$C_1 \approx 1.59 \quad (2-2-25)$$

が得られる。

以上の結果より S-L-D モデルと H-N モデルをまとめて続く 2 ページに示す。

S-L-D モデル

連続の方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-2-4)$$

平均流の運動方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_* + \nu) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2-2-8)$$

$$\text{ただし } \pi = \frac{P}{\rho} + \frac{2}{3} q$$

q の輸送方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (q U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_*}{\sigma_1} + \nu \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} + \nu_* \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad \dots (2-2-16)$$

\epsilon の輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_*}{\sigma_2} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{\epsilon}{q} \nu_* \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{q \epsilon}{\nu_*} \quad (2-2-20)$$

\nu_* と q, \epsilon の関係式

$$\nu_* = C_D \frac{q^2}{\epsilon} \quad (2-2-18)$$

彼らの提案では

$$\sigma_1 = 1.0, \quad \sigma_2 = 1.3, \quad C_D = 0.09, \quad C_1 = 1.59, \quad C_2 = 0.18.$$

H-Nモデル

連続の方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-2-4)$$

平均流の運動方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_* + \nu) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2-2-8)$$

φの輸送方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\theta}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_* \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\alpha \nu_* + \nu) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} + \nu_* \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \epsilon \quad \dots (2-2-25)$$

εの輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (a_3 \nu_* + \nu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + a \frac{\epsilon}{\phi} \nu_* \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{\epsilon^2}{\phi} \quad \dots (2-2-26)$$

ただし、

$$\Delta = \beta \left(1 + \delta \frac{\nu_*}{\nu} \right), \quad \Delta' = \beta' \left(1 + \delta' \frac{\nu_*}{\nu} \right)$$

ν_*とφ, εの関係式

$$\nu_* = \frac{\nu_0}{2} + \left\{ \left(\frac{\nu_0}{2} \right)^2 + \frac{\nu \nu_0}{\delta} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ただし、 $\nu_0 = \frac{4\gamma\beta\delta\phi^2}{\epsilon} \quad (2-2-27)$

$$\alpha, \gamma, \theta, a_3 \approx 1, \quad a \leq 2, \quad \beta = 5, \quad \beta' \approx 10, \quad \delta, \delta' \approx 0.2.$$

第3節 二方程式モデルによる非等温乱流解析法 (1)

3-1. 火災気流の乱流解析に関して

前節で述べた、室内気流の乱流解析法にのり、温度に関する項、あるいは式をつけ加えて、二方程式モデルのうち、S-L-Dモデルを用いた非等温乱流解析法を導く。後で示す、水平路における流線図(注1)は、本節の記述をもとに行なったものである。

ここで行なう数値計算法では、気体を非圧縮性のものと仮定し、密度変化は浮力を考える時にしか考慮しない Boussinesq の近似を用いている。
(2)

注1) この水平路における数値計算は、辻本稔氏がその卒論において行ったものであるが、筆者の入手したものは、流線図が付いていなかったため、筆者が行なった斜路における流線図と比較検討するため、私が追体験したものである。

3-2 基礎方程式

この節では、二方程式モデルによる非等温乱流解析の手法を火災時の気流の解析に適用してみる。非等温乱流に関して二方程式モデルは、下記のごとくなる。
(5-L-Dモデル)

連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-3-1)$$

運動方程式 (Navier-Stokes の方程式)

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_t + \nu) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \delta_{i3} g \beta \theta \quad (2-3-2)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\alpha + \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\} \quad (2-3-3)$$

乱流エネルギーの輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon + g \beta \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \quad \dots (2-3-4)$$

エネルギー(粘性)逸散率の輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{\epsilon}{\nu_t} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\epsilon}{\nu_t} \epsilon + C_3 g \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \quad \dots (2-3-5)$$

渦動粘性係数を決定する式

$$\nu_t = C_0 \frac{q^2}{\epsilon}$$

定数の値は

$$\sigma_1 = 1.0, \sigma_2 = 1.3, \sigma_\theta = 1.0, C_0 = 0.09, C_1 = 1.59, C_2 = 0.18, C_3 = 0$$

を用いた。

総和規約で表現された前ページの基礎方程式を、二次元で書き下すと。

連続の式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2-3-1')$$

運動方程式 (Navier-Stokes の方程式)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \quad (2-3-2')$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial y} \right\} - g\beta\theta \quad (2-3-2'')$$

$$\left(\pi = P + \frac{2}{3}\rho, \quad \nu_e = \nu_t + \nu \right)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} \quad (2-3-3')$$

$$\left(\nu_\theta = a + \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \right)$$

q の輸送方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qU)}{\partial x} + \frac{\partial(qV)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_q \frac{\partial q}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_q \frac{\partial q}{\partial y} \right\} + \nu_t S - \epsilon + g\beta \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \dots (2-3-4')$$

$$\left(\nu_q = \frac{\nu_t}{\sigma_i} + \nu, \quad S = 2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) \quad \dots (2-3-4'')$$

ϵ の輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon U)}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} + C_1 \nu_t S \frac{\epsilon}{q} - C_2 \frac{q}{\nu_t} \epsilon \quad \dots (2-3-5')$$

$$\left(\nu_\epsilon = \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right)$$

滑動粘性係数を決定する式

$$\nu_t = C_D \frac{\rho^2}{\epsilon} \quad (2-3-6')$$

ただし(2-3-5)で $C_D = 0$ であるのでこの項は無視した^{(10), (14)}
⁽¹⁵⁾

3-3 基礎方程式の無次元化 (3)

前節の基礎方程式に現われる物理量すべてを、代表長さ L_0 、代表速度 V_0 、代表温度差 $\Delta \theta_0$ によって無次元化する。無次元化された量は、大文字で表すか、*印をつけて表わすと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L_0}, & T &= \frac{t}{(L_0/V_0)}, & U^* &= \frac{U}{V_0}, & P &= \frac{P}{\rho V_0^2} \\ \nu_t^* &= \frac{\nu_t}{U_0 L_0}, & Q &= \frac{q}{V_0^2}, & E &= \frac{\epsilon}{(V_0^3/L_0)}, & \Theta &= \frac{\theta - \text{気温}}{\Delta \theta_0} \end{aligned}$$

これらの無次元量で書き直した方程式を、簡単のため*をとって記述する。

連続の方程式

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2-3-7)$$

運動方程式 (Navier-Stokesの方程式) (flux型)

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial \pi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right\} \quad (2-3-8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} = -\frac{\partial \pi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} - Ar \Theta \quad (2-3-9)$$

$$\left(\text{ただし, } \pi = P^* + \frac{2}{3} Q, \quad \nu_e = \nu_t^* + \nu = \nu_t^* + \frac{1}{Re} \right) \quad (2-3-10)$$

エネルギー-方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} + \frac{\partial (U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial (V\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \theta}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right\} \quad (2-3-11)$$

$$\left(\text{ただし, } \nu_\theta = a + \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \right) \quad (2-3-12)$$

乱流エネルギー-(q)の輸送方程式 (flux)

$$\frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial (QU)}{\partial X} + \frac{\partial (QV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_q \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_q \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_t S - E + Ar \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (2-3-13)$$

$$\text{ただし, } \nu_q = \frac{\nu_t^*}{\sigma_1} + \nu = \frac{\nu_t^*}{\sigma_1} + \frac{1}{Re} \quad (2-3-14)$$

$$S = 2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (2-3-15)$$

エネルギー-(粘性)逸散率(ϵ)の輸送方程式

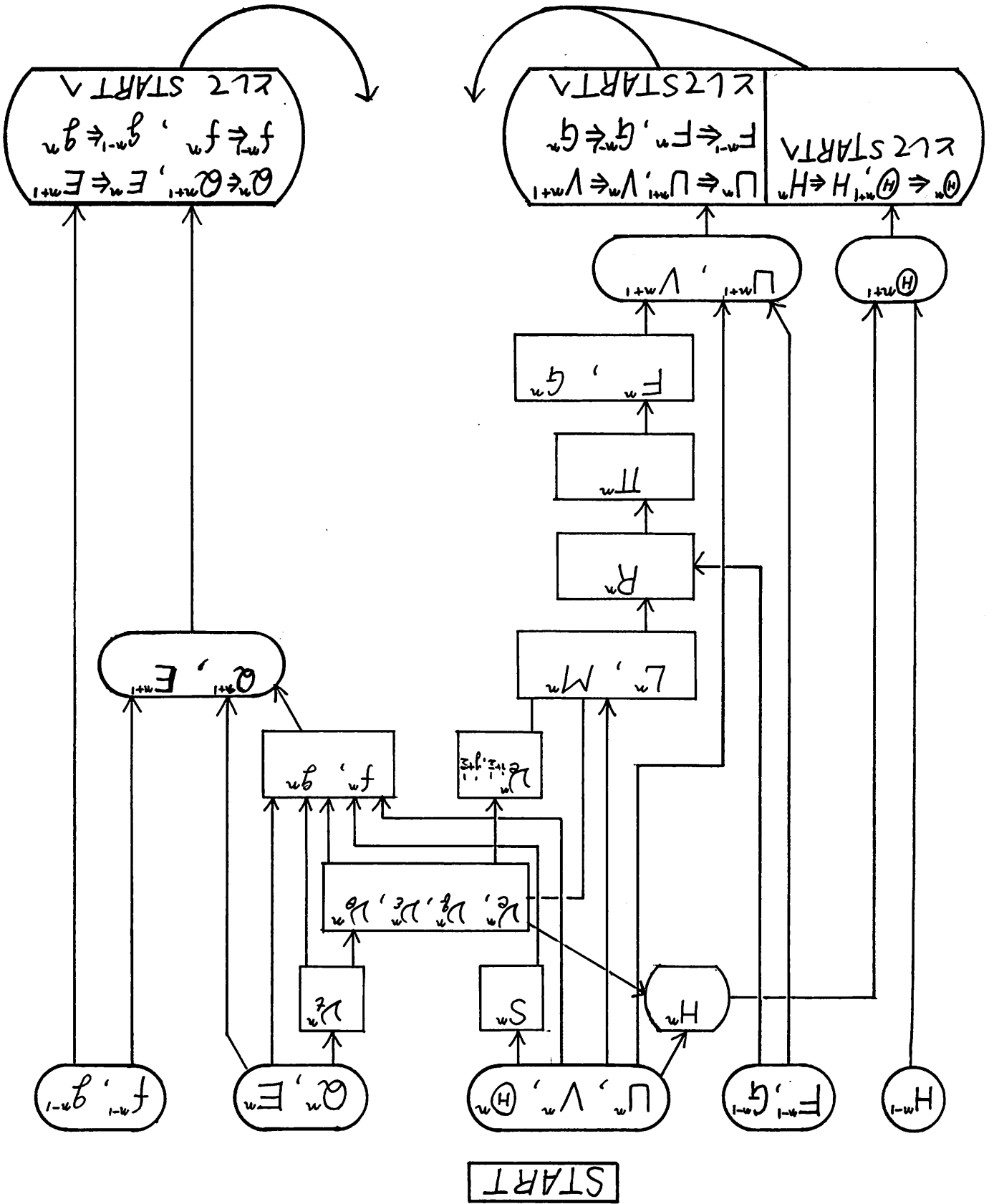
$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial (EU)}{\partial X} + \frac{\partial (EV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial Y} \right\} + C_1 \nu_t S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_t} E \quad (2-3-16)$$

$$\text{ただし, } \nu_\epsilon = \frac{\nu_t^*}{\sigma_2} + \frac{1}{Re} \quad (2-3-17)$$

渦動粘性係数を決定する式

$$\nu_t = C_0 \frac{Q^2}{E} \quad (2-3-18)$$

図 2-1



3-4. 計算手順を示すグラフ

第4節.2方程式モデルの斜路への応用

4-1.2方程式モデルによる非等温乱流解析法の

斜路への応用に関して.

前節では、水平路における非等温乱流解析法を紹介した。本節では、これを階段等のような斜路にした場合にもとになる方程式はどのように変化するかを示した。

また、この斜路の場合においても、Boussinesq近似を用いているが、この場合、浮力が y 方向のみではなく、 x 方向にも働いてくる。このため運動方程式と ρ (乱流エネルギー) と ϵ (エネルギー逸散率) の輸送方程式は変化が生じてくる。(ただし、 ϵ においては、近似した時の係数がほぼ0となるため実質的に変化はしないが)。又、計算手順は、前節と同様である。

4-2 基礎方程式

この節では、二方程式モデルによる非等温乱流解析の手法を、斜路における火災時の気流の解析に応用する。この場合の二方程式モデルは、運動方程式と θ の輸送方程式、 ϵ の輸送方程式において、2章第3節と少し異なってくる。

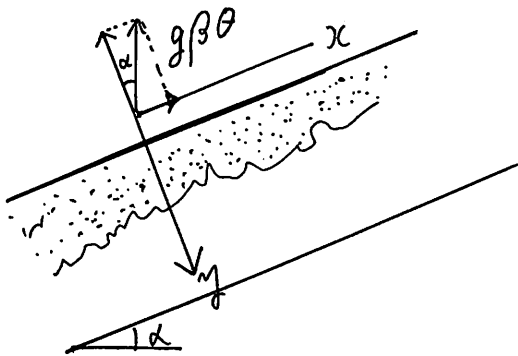


図. 2-2

浮力が、上図のように働くので、運動方程式は、

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \delta_{2i} g \beta \tilde{\theta} \sin \alpha - \delta_{2i} g \beta \tilde{\theta} \cos \alpha \quad \dots (2-4-1)$$

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i, \quad \tilde{p} = P + p, \quad \tilde{\theta} = \Theta + \theta \quad (2-4-2)$$

の如く時間平均値と変動値に分け、方程式全体に対して時間平均の操作 $\bar{\quad}$ を施すと、

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j} \right\} + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \Theta \quad (2-4-3)$$

(2-4-1) から (2-4-2) を引くと

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \theta \quad (2-4-4)$$

この式に u_i を乗じ時間平均をとると、 g の輸送方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t} + U_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + g' \right) u_j \right\} + \nu \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{u_i \theta} \quad (2-4-5)$$

ただし δ_{1i}, δ_{2i} はフロネッカーのデルタである。

ここで右辺の - のついた項を 2-3 節と同様に近似をとり、最後の $\overline{u_i \theta}$ については、

$$\overline{u_i \theta} \approx -\frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2-4-6)$$

とすると、結局

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial (U_j g)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_i} + \nu \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon + (\delta_{2i} \cos \alpha - \delta_{1i} \sin \alpha) g \beta \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2-4-7)$$

(2-4-4) 式を x_k で微分して $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ を乗じた後時間平均をとると、 ϵ の輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= -2\nu \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p}{\rho} \right)} \right\} \right] \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\epsilon' u_j}) \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\ &\quad + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \cdot 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (2-4-8) \end{aligned}$$

が得られる。

(2-4-8) 式を2-3と同様にして、S-L-Dモデルに従って近似すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j') &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_2} + \nu \right) \frac{\partial E}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{E}{g} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i'}{\partial x_j} - C_2 \frac{g E}{\nu_t} \\ &\quad - C_3 g \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin \alpha + C_3 g \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cos \alpha \quad (2-4-8') \end{aligned}$$

となる。

以上の結果のみをまとめたいものを次ページに掲げる。

連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-4-9)$$

運動方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_t + \nu) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \delta_{ij} g \beta \Theta \sin \alpha - \delta_{2j} g \beta \Theta \cos \alpha \quad (2-4-10)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(a + \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\} \quad (2-4-11)$$

乱流エネルギー (ρ) の輸送方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\rho} + \nu \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon - \sin \alpha g \beta \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \cos \alpha g \beta \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \quad (2-4-12)$$

エネルギー逸散率 (ϵ) の輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon U_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{\epsilon}{\rho} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\rho \epsilon}{\nu_t} \\ &\quad - C_3 g \beta \rho \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin \alpha + C_3 g \beta \rho \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cos \alpha \quad (2-4-13) \end{aligned}$$

渦動粘性係数を決定する式

$$\nu_t = C_0 \frac{\rho^2}{\epsilon} \quad (2-4-14)$$

(2-4-9) ~ (2-4-14) の基礎方程式に含まれる定数に関しては、次の値を用いた。

$\sigma_1 = 1.0, \sigma_2 = 1.3, \sigma_\theta = 1.0, C_0 = 0.09, C_1 = 1.59$ $C_2 = 0.18, C_3 = 0$
--

総和規約で表現された方程式を2次元で書き下す。

連続の式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2-4-15)$$

運動方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} + g\beta\Theta \sin \alpha \quad (2-4-16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial y} \right\} - g\beta\Theta \cos \alpha \quad (2-4-17)$$

$$\left(\pi = p + \frac{2}{3}q, \quad \nu_e = \nu_t + \nu \right) \quad (2-4-18)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial x} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right\} \quad (2-4-19)$$

$$\left(\nu_0 = a + \frac{\nu_t}{\sigma_0} \right) \quad (2-4-20)$$

乱流エネルギー (q) の輸送方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qU)}{\partial x} + \frac{\partial(qV)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_q \frac{\partial q}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_q \frac{\partial q}{\partial y} \right\} + \nu_t S - \epsilon - \sin \alpha \cdot g\beta \frac{\nu_t}{\sigma_0} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \cos \alpha \cdot g\beta \frac{\nu_t}{\sigma_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (2-4-21)$$

$$\left(S = 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, \quad \nu_q = \frac{\nu_t}{\sigma_1} + \nu \right) \quad (2-4-22)$$

エネルギー-逸散率 (ϵ) の輸送方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon U)}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} + C_1 \nu_t S \frac{\epsilon}{q} - C_2 \frac{q\epsilon}{\nu_t} \quad (2-4-23)$$

$$\left(\nu_\epsilon = \frac{\nu_t}{\sigma_2} + \nu \right) \quad (2-4-24)$$

滑動粘性係数を決定する式

$$V_s = C_D \frac{g^2}{\epsilon} \quad (2-4-25)$$

ただし、(2-4-13) で $C_3 = 0$ であるので、この項は無視し、
他の定数は、文字のまま扱った。(10), (14), (15)

4-3. 基礎方程式の無次元化

前ページまでの基礎方程式に現われる物理量すべてを、代表長さ L_0 、代表速度 V_0 、代表温度差 $\Delta\theta$ で無次元化する。無次元化された量は、大文字で表わすか*印をつけて表わすと、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{L_0}, & T &= \frac{t}{(L_0/V_0)}, & U^* &= \frac{U}{V_0}, & P &= \frac{P}{\rho V_0^2} \\
 v_e^* &= \frac{v_e}{U_0 L_0}, & Q &= \frac{q}{V_0^2}, & E &= \frac{\epsilon}{(V_0^3/L_0)}, & \theta &= \frac{\theta - \text{気温}}{\Delta\theta_0}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \theta: \text{静止気温からの} \\ \text{差温} \\ (2-4-26) \end{array} \right\}$$

連続の式

$U = U^* V_0$, $x = L_0 X$ 等を (2-4-15) に代入すると

$$\frac{\partial(U^* V_0)}{\partial(L_0 X)} + \frac{\partial(V^* V_0)}{\partial(L_0 Y)} = 0 \quad \therefore \frac{V_0}{L_0} \left(\frac{\partial U^*}{\partial X} + \frac{\partial V^*}{\partial Y} \right) = 0$$

$$* \text{をとって} \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2-4-27)$$

運動方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(U^* V_0)}{\partial(T L_0/V_0)} + \frac{\partial(U^{*2} V_0^2)}{\partial(L_0 X)} + \frac{\partial(U^* V^* V_0^2)}{\partial(L_0 Y)} &= -\frac{V_0^2}{L_0} \frac{\partial \pi}{\partial X} + \left\{ 2 \frac{(v_e^* + v)}{v_e^*} \right\} V_0 L_0 \frac{\partial(U^* V_0)}{\partial(L_0 X)} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial(L_0 Y)} \left\{ v_e^* V_0 L_0 \left(\frac{\partial(U^* V_0)}{\partial(Y L_0)} + \frac{\partial(V^* V_0)}{\partial(X L_0)} \right) \right\} + g \beta \Delta\theta_0 \theta \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\frac{V_0^2}{L_0} \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial T} + \frac{\partial U^{*2}}{\partial X} + \frac{\partial(U^* V^*)}{\partial Y} \right\} = -\frac{V_0^2}{L_0} \frac{\partial \pi}{\partial X} + \frac{V_0^2}{L_0} \left\{ 2 v_e^* \frac{\partial U^*}{\partial X_0} \right\}$$

$$+ \frac{V_0^2}{L_0} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ v_e^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial Y} + \frac{\partial V^*}{\partial X} \right) \right\} + g \beta \Delta\theta_0 \theta \sin \alpha$$

*をとると

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right\} + \frac{g \beta L_0 \Delta \theta_0}{V_0^2} \Theta \sin \alpha$$

Ar. ... (2-4-28)

同様にして

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} - \frac{g \beta L_0 \Delta \theta_0}{V_0^2} \Theta \cos \alpha$$

Ar. ... (2-4-29)

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\}$$

($\nu_0 = a + \frac{\nu_t}{\sigma_0}$)

$$\frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\theta - \theta_0))}{\partial x} + \frac{\partial(v(\theta - \theta_0))}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_0 \frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial y} \right\}$$

$$\odot \frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\theta - \theta_0))}{\partial x} + \frac{\partial(v(\theta - \theta_0))}{\partial y}$$

θ_0 : 気温 (定数として扱う)

$$= \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta_0}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\theta_0)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} - \frac{\partial(v\theta_0)}{\partial y}$$

$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} = 0$

$$= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} - \theta_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$\frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0, \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = 0$

$\theta - \theta_0 = \theta^* \Delta \theta_0$ を代入すると

$$\frac{\partial(\theta^* \Delta \theta_0)}{\partial T L_0 / V_0} + \frac{\partial(U V_0 \theta^* \Delta \theta_0)}{\partial X L_0} + \frac{\partial(V V_0 \theta^* \Delta \theta_0)}{\partial Y L_0} = \frac{\partial}{\partial X L_0} \left\{ \nu_0^* V_0 L_0 \frac{\partial \theta^* \Delta \theta_0}{\partial X L_0} \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial Y L_0} \left\{ \nu_0^* V_0 L_0 \frac{\partial \theta^* \Delta \theta_0}{\partial Y L_0} \right\}$$

$$\frac{V_0 \Delta \Theta_0}{L_0} \left\{ \frac{\partial \Theta^*}{\partial T} + \frac{\partial (U \Theta^*)}{\partial X} + \frac{\partial (V \Theta^*)}{\partial Y} \right\} = \frac{V_0 \Delta \Theta_0}{L_0} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0^* \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0^* \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right\} \right]$$

* をとって

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{\partial (U \Theta)}{\partial X} + \frac{\partial (V \Theta)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right\} \quad (2-4-30)$$

$$\left(\text{ただし, } \nu_0 = a + \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \right)$$

乱流エネルギー - (8) の輸送方程式

$$() \text{ に } q = Q V_0^2, \quad U = U^* V_0, \quad t = L_0 / V_0 \cdot T$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (Q V_0^2)}{\partial (T L_0 / V_0)} + \frac{\partial (Q V_0^3 U^*)}{\partial (L_0 X)} + \frac{\partial (Q V_0^3 V^*)}{\partial (L_0 Y)} \\ &= \frac{\partial}{\partial (L_0 X)} \left\{ V_0 L_0 \nu_0^* \frac{\partial (Q V_0^2)}{\partial (L_0 X)} \right\} + \frac{\partial}{\partial (L_0 Y)} \left\{ V_0 L_0 \nu_0^* \frac{\partial (Q V_0^2)}{\partial (L_0 Y)} \right\} \\ &+ V_0 L_0 \nu_0^* \frac{V_0^2}{L_0^2} S^* - \frac{V_0^3}{L_0} E \\ &- \sin \alpha \cdot g \beta \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{V_0 L_0 \Delta \Theta_0}{L_0} \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \cos \alpha \cdot g \beta \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{V_0 L_0 \Delta \Theta_0}{L_0} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \end{aligned}$$

* をとると

$$\begin{aligned} & \frac{V_0^3}{L_0} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial (Q U)}{\partial X} + \frac{\partial (Q V)}{\partial Y} \right\} = \frac{V_0^3}{L_0} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0 \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_t^* S - E \right] \\ & - g \beta V_0 \Delta \Theta_0 \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \sin \alpha + g \beta V_0 \Delta \Theta_0 \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial (Q U)}{\partial X} + \frac{\partial (Q V)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0 \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_t^* S - E$$

$$- \underbrace{\left(\frac{g \beta \Delta \Theta_0 L_0}{V_0^2} \right)}_{= Ar} \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \sin \alpha + \underbrace{\left(\frac{g \beta \Delta \Theta_0 L_0}{V_0^2} \right)}_{= Ar} \frac{\nu_t^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial(QU)}{\partial X} + \frac{\partial(QV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_f \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_f \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_f^* S - E$$

$$- Ar \frac{\nu_f^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \sin \alpha + Ar \frac{\nu_f^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cos \alpha \quad (2-4-31)$$

$$\left(\text{右左} L, \nu_f = \frac{\nu_f^*}{\sigma_1} + \nu = \frac{\nu_f^*}{\sigma_1} + \frac{1}{Re} \right)$$

$$S = 2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (2-4-32)$$

エネルギー-逸散率 (ϵ) の輸送方程式

$$\frac{\partial(EV_0^3/L_0)}{\partial(TL_0/V_0)} + \frac{\partial(EV_0^3/L_0 \cdot U^*V_0)}{\partial(XL_0)} + \frac{\partial(EV_0^3/L_0 \cdot V^*V_0)}{\partial(YL_0)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(XL_0)} \left\{ V_0 L_0 \nu_\epsilon^* \frac{\partial(EV_0^3/L_0)}{\partial(XL_0)} \right\} + \frac{\partial}{\partial(YL_0)} \left\{ V_0 L_0 \nu_\epsilon^* \frac{\partial(EV_0^3/L_0)}{\partial(YL_0)} \right\}$$

$$+ C_1 \nu_\epsilon^* V_0 L_0 \frac{S V_0^3 E / L_0}{L_0^2 Q V_0^2} - C_2 \frac{Q V_0^2}{\nu_\epsilon^* V_0 L_0} E V_0^3 / L_0$$

$$\left(\epsilon = (V_0^3/L_0)E, \quad q = QV_0^2, \quad \nu_\epsilon = V_0 L_0 \nu_\epsilon^*, \quad x = XL_0, \quad y = YL_0 \right)$$

$$\frac{V_0^7}{L_0^2} \left\{ \frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial(EU)}{\partial X} + \frac{\partial(EV)}{\partial Y} \right\} = \frac{V_0^7}{L_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial Y} \right\} \right]$$

$$+ C_1 \nu_\epsilon^* S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_\epsilon^*} E \quad \left. \right\}$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial(EU)}{\partial X} + \frac{\partial(EV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial E}{\partial Y} \right\}$$

$$+ C_1 \nu_\epsilon^* S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_\epsilon^*} E \quad (2-4-33)$$

$$\left(\text{右左} L, \nu_\epsilon = \frac{\nu_\epsilon^*}{\sigma_2} + \frac{1}{Re} \right) \quad (2-4-33')$$

滑動粘性係数を決定する式

$$\nu_t^* V_0 L_0 = C_D \frac{(Q V_0^2)^2}{E V_0^3 / L_0}$$

$$\nu_t^* = C_D \frac{Q^2}{E} \quad (2-4-34)$$

以上で、無次元化がなされたわけであるが、これらの結果のみを、次ページ以降にまとめて示す。

無次元された基礎方程式(2次元)

連続の方程式

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2-4-27)$$

運動方程式(flux型)

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + Ar \Theta \sin \alpha \quad \dots (2-4-28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} - Ar \Theta \cos \alpha \quad \dots (2-4-29)$$

$$\left(\text{ただし, } \Pi = P^* + \frac{2}{3} Q, \quad \nu_e = \nu_e^* + \nu = \nu_e^* + \frac{1}{Re} \right) \quad \dots (2-4-29')$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\theta \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right\} \quad (2-4-30)$$

$$\left(\text{ただし, } \nu_\theta = a + \frac{\nu_e^*}{\sigma_\theta} \right) \quad (2-4-30')$$

乱流エネルギー(ε)の輸送方程式(flux型)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial(QU)}{\partial X} + \frac{\partial(QV)}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_\epsilon \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_\epsilon^* S - E \\ &\quad - Ar \frac{\nu_\epsilon^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \sin \alpha + Ar \frac{\nu_\epsilon^*}{\sigma_\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cos \alpha \quad \dots (2-4-31) \end{aligned}$$

ただし

$$\nu_\epsilon = \frac{\nu_e^*}{\sigma_\epsilon} + \nu = \frac{\nu_e^*}{\sigma_\epsilon} + \frac{1}{Re}, \quad S = 2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \quad \dots (2-4-32)$$

エネルギー逸散率 (ϵ) の輸送方程式

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial(EU)}{\partial X} + \frac{\partial(EV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_{\epsilon} \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_{\epsilon} \frac{\partial E}{\partial Y} \right\} + C_1 \nu_{\epsilon}^* S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_{\epsilon}^*} E$$

... (2-4-33)

$$\left(\text{ただし、 } \nu_{\epsilon} = \frac{\nu_{\epsilon}^*}{\sigma_2} + \frac{1}{Re} \right) \quad \dots (2-4-33')$$

渦動粘性係数を決定する式

$$\nu_{\epsilon} = C_0 \frac{Q^2}{E} \quad (2-4-34)$$

第5節. 式の展開.

第2節. 第4節において水平路及び斜路における乱流の基礎方程式を導いたが、このうち、乱流エネルギー(ϵ)、及び、エネルギー逸散率(ϵ)の輸送方程式は、「 U_i を乗じ、時間平均をとると……」、「 x_k で微分して $2U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$ を乗じた後時間平均をとると…」と言って、結果の式のみがポンと提示してあるが、実はこの変形操作が、なかなか面倒で複雑である。又、この変形について、詳しく説明した文献も、私の搜した限りでは見当たらないようなので、^(注1)ここに、その展開を、斜路の場合を例にとりて記しておく。

5-1. 平均操作の規則

式を変形するにあたって、すこし準備が必要である。それがこの、“平均操作の規則”である。これは、「統計流体力学、1.」(アーレス・モーニン著、山田豊一訳)⁽¹⁶⁾(p.176)からの引用である。

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (2-5-1)$$

$$\overline{af} = a \overline{f} \quad a = \text{const のとき} \quad (2-5-2)$$

$$\overline{a} = a \quad a = \text{const のとき} \quad (2-5-3)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}, \quad \text{ただし } s \text{ は } x_1, x_2, x_3, \text{ または } t \quad (2-5-4)$$

$$\overline{f g} = \overline{f} \overline{g} \quad (2-5-5)$$

ただし、 f, g は、 x_1, x_2, x_3, t の関数。或 u_i

これらは、一般に Reynolds の条件と呼ばれている。

条件 (2-5-4) は、平均操作と極限移行操作の互換性というもっと一般的な条件とおきかえることもできる。

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n}$$

$g = 1, g = \bar{h}, g = h' = h - \bar{h}$ を順に (2-5-5) に代入して。

(ダッシュは常に対応する量のゆらぎ、すなわち平均値からの偏差を示す。)、(2-5-1) と (2-5-3) を用いて次の重要な Reynolds の条件の系 (corollary) を得る。

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f'} = \overline{f - \bar{f}} = 0, \quad \overline{\bar{f} h} = \bar{f} \bar{h}, \quad \overline{f h'} = \overline{f h} - \bar{f} \bar{h} = 0 \quad (2-5-6)$$

5-2. 乱流エネルギー (2) の輸送方程式の導入

もとになる式は、(2-4-4) 式で

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \\ & + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \theta \end{aligned} \quad (2-4-4)$$

この式に u_i を乗じ時間平均をとると。

$$\begin{aligned} \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = & -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j})} \\ & + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{u_i \theta} \end{aligned} \quad (2-5-7)$$

左辺第一項

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial t} \stackrel{(2-5-4)}{=} \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial t}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2-5-8) \end{aligned}$$

この変形は、微分と積分の順序の交換である。

則ち、数学の公式

$a \leq x \leq b$ で $f(x, t)$ と $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ とが連続ならば

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \quad (*)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i u_i dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial u_i u_i}{\partial t} dt = \overline{\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial t}} \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} 2 u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \\ &= \overline{2 u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial t}} = \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}}$$

左辺第2項

$$\overline{u_i U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{U_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (\because (2-5-2))$$

第一項と同様にして

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{(u_i u_i)}}{\partial x_j} \underset{\substack{\uparrow \\ (2-5-4) \text{ 又は } (*) \text{ による}}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{(u_i u_i)}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \underset{\uparrow}{(2-5-2)}$$

$$\therefore \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j}$$

$$\therefore \overline{u_i U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}} \quad (2-5-9)$$

左辺第3項

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (\because \overline{U_i} = U_i) \quad \dots (2-5-10)$$

左辺第4項

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}} \quad (2-5-11)$$

$$\text{したがって } \rho' \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (2-5-12)$$

右辺第1項

$$\begin{aligned}
-\overline{u_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}} &= -\overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \quad (\because \frac{1}{\rho} = \text{const}) \\
&= -\overline{\left\{ u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{P}{\rho} \right) + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{P}{\rho} \right) + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right\}} \\
&= -\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \\
&= -\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right) u_j} \quad (\because -\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right)} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j}) \\
&= -\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right) u_j} = -\overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \quad (\because \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0)
\end{aligned}$$

(2-5-13)

右辺第2項

$$\begin{aligned}
\nu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) \\
&= \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} dt \right) \\
&= \nu \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) dt \\
&= \nu \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + u_i \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} \right\} dt \\
&= \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}}
\end{aligned}$$

(2-5-14)

又は、Reynolds の条件を使えば

$$\nu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \\
&= \overline{\nu \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\}} \\
&= \overline{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} + \overline{\nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}
\end{aligned}$$

と簡単に書ける。どちらにしても、この関係より

$$\begin{aligned}
\nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \\
&= \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} - \epsilon
\end{aligned} \tag{2-5-15}$$

$$\text{但し } \epsilon \equiv \overline{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \tag{2-5-16}$$

右辺第3項

$$\begin{aligned}
\overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} &= \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i u_j dt \right)} \\
&= \overline{u_i \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) dt} \\
&= \overline{u_i \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dt} \\
&= \overline{u_i \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j dt} \quad (\odot \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \text{連続の式より}) \\
&= \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j} \\
&= \overline{\bar{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j} \\
&= 0 \quad (\odot \bar{u}_i = 0) \tag{2-5-17}
\end{aligned}$$

Reynolds の条件をそのまま用いれば

$$\begin{aligned} \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} &= \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} \\ &= \overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{(u_i u_j)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と簡記できる。いずれにしてもこの項は0になる。

右辺第4項

$$\begin{aligned} \overline{(\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g^\beta u_i \theta} &= \overline{(\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g^\beta u_i \theta} \\ &= \delta_{11} \sin \alpha \cdot g^\beta \overline{u_1 \theta} - \delta_{22} \cos \alpha \cdot g^\beta \overline{u_2 \theta} \\ &\quad \dots (2-5-18) \end{aligned}$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタで

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & (i=j) \\ \delta_{ij} = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

以上 (2-5-8) ~ (2-5-18) の関係を (2-5-7) に代入すると.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial \varphi'}{\partial x_j}} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} \right) u_j + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} - \epsilon$$

$$+ (\delta_{1i} \sin \alpha + \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{u_i \theta} \quad (2-5-19)$$

移項して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{P}{\rho} + \varphi' \right) u_j \right\} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon$$

$$+ (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{u_i \theta} \quad (2-5-20)$$

$$* \frac{\partial (\varphi' u_j)}{\partial x_j} = \underbrace{\varphi' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{=0} + u_j \frac{\partial \varphi'}{\partial x_j}$$

$$= \overline{u_j \frac{\partial \varphi'}{\partial x_j}}$$

連続の式 $\partial U_j / \partial x_j = 0$ を用いて、移流項を flux form にすると.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (U_j \varphi)}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{P}{\rho} + \varphi' \right) u_j \right\} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon$$

$$+ (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{u_i \theta}$$

... (2-5-21)

5-3. エネルギー-逸散率(ϵ)の輸送方程式の導入

もとになる式は、やはり(2-4-4)式で

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) + (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \theta \quad (2-4-4)$$

この式を x_k で微分し $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ を乗じた後時間平均をとると、

$$\begin{aligned} & 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ & = 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \\ & \quad + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \theta \quad (2-5-22) \end{aligned}$$

左辺第1項

$$\epsilon \approx \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad \text{と近似できるので。}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= \nu \frac{\partial}{\partial t} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \stackrel{\text{①(2-5-4)}}{=} \nu \frac{\partial}{\partial t} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} \stackrel{\text{(2-5-2)}}{=} 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j}} \\ & \quad \downarrow (*) \\ & = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial t}} \\ & = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t}} \quad (2-5-23) \end{aligned}$$

(*)の変形は、総和規約

による。すなわち同じ文字が出てきたらその文字について1から3まで和をとる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j \partial t} \\
&= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} \\
&\quad + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} \\
&\quad + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} \\
&= \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k \partial t} \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial t} \tag{2-5-24}
\end{aligned}$$

左辺第2項

$$\begin{aligned}
2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= 2) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} U_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \\
&= 2) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \tag{2-5-25}
\end{aligned}$$

(*)の変形は、添字を $(i, j, k) \rightarrow (k, i, j)$ のように、ローテーションさせたものである。総和規約の性質上、2の2つは同じものを表す。第1項のように展開してみれば、 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 項の式となり、両者が等しくなることは、容易にわかる。また $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ は(2-5-4), (2-5-5)より—の外に出る。
(後出)

(**)

$$\begin{aligned}
\therefore U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= 2) U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 \stackrel{\uparrow}{=} 2) U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 = 2) U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \\
&\quad \textcircled{\smile} (2-5-6) \tag{2-5-26}
\end{aligned}$$

ただし、総和規約により、

$$\epsilon \approx \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2} \quad (2-5-27)$$

が成り立つ。なぜなら2乗を並べて書くと、

$$\epsilon \approx \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \quad (2-5-27')$$

というように同じ文字が現われるので、これについて、和をとると、両者は等しいことがわかる。

左辺第3項

$$\begin{aligned} 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)} \\ &= 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\ &= 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + 2) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \quad (2-5-28) \end{aligned}$$

ここで、一行目から二行目、二行目から三行目の変形は、おいては、次の間係を用いている。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (2-5-4) \quad \overline{f g} = \overline{f} \overline{g} \quad (2-5-5)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ &\stackrel{(2-5-4)}{=} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \stackrel{(2-5-5)}{=} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \stackrel{(2-5-4)}{=} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \end{aligned}$$

左辺第4項

$$\begin{aligned}
 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right) \\
 &= 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \\
 &= 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} 2) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \\
 &= 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \epsilon'}{\partial x_j} \\
 &= 2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon' u_j) \quad (2-5-29)
 \end{aligned}$$

(*)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon' u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon' u_j) = \underbrace{\epsilon'}_{0} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \epsilon'}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \epsilon'}{\partial x_j} \quad (2-5-29')$$

0 (:連続の条件)

右辺第1項

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right\} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \\
 &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (2-5-30)
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = -2) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) = -2) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right\} \quad (2-5-30')$$

右边第2项

$$\begin{aligned}
 \triangleright \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} &= \triangleright \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \triangleright \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2} \\
 &= \triangleright \frac{\partial}{\partial x_j} \triangleright \overline{2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\
 &= 2 \triangleright \left(\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}} \right) \\
 &= 2 \triangleright^2 \left(\overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} + \overline{2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \triangleright \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}} \right) \quad (2-5-31)
 \end{aligned}$$

$$2 \triangleright \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \triangleright \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}} = \triangleright \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} - 2 \triangleright^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \quad (2-5-31')$$

右边第3项

$$\begin{aligned}
 2 \triangleright \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} &\stackrel{(2-5-4)}{=} 2 \triangleright \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} \\
 &\stackrel{(2-5-5)}{=} 2 \triangleright \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)} \\
 &\stackrel{(*)}{=} 0 \quad (2-5-32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dt = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i dt}_0 \right) = 0 \quad (2-5-33) \\
 \text{又は } \phi, \text{ と簡単にして} & \\
 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &= \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} = 0 \quad (\because \overline{u_i} = 0)
 \end{aligned}$$

右辺第4項

$$\begin{aligned}
 & 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \theta \\
 & \stackrel{\uparrow}{=} 2\nu (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \quad (2-5-34) \\
 & (2-5-2)
 \end{aligned}$$

以上 (2-5-23) から (2-5-34) の関係を (2-5-22) に代入すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\
 & + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\epsilon' u_j}) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \right\} + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} \\
 & - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} + 2\nu (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \quad (2-5-35)
 \end{aligned}$$

移項して、まとめると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= -2\nu \left[\overline{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{P}{\rho} \right)} \right\} \right] \\
 & - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\epsilon' u_j}) \\
 & + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} \\
 & - 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\
 & + 2\nu (\delta_{1i} \sin \alpha - \delta_{2i} \cos \alpha) g \beta \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \quad (2-4-7)
 \end{aligned}$$

注1) 本節(2章5節)を書き上げてから、文献(9)を入手した。この論文の付録の部分(P.155, 156)に、これらの式の変形が、やや詳しく載っていた。

第Ⅱ章. 数値解析について (1)

第1節. 数値解析とは.

今回の数値実験に必要な数値解析については、私の参考にした論文(辻本総「火災時の煙流動に関する実験的研究」(卒論))に詳しく説明されているので、詳しく知りたい方は、そちらの方を参照されたい。しかし、ごく基本的な事柄については、いちいち参照するのも不便であるので、この章に、簡単にまとめておくことにした。

前章までに示した流体の基礎方程式は、非線型連立偏微分方程式で、数学の分野でその解の存在が云々されているくらいであり、解析的に一般解を求めることは、ほとんど不可能に近いと思われる。そこで、数値計算では、場を格子に分割し、時間を各ステップに分割して、各格子点、各時間ステップで、 U, V, W, P, θ, C を定義する。そして、その U, V, W, P, θ, C が微分方程式から得られた差分方程式を満たすように、イテレーション(繰返し計算のこと)で各数値を決定する。

微分方程式 \longrightarrow 差分式

$$\left. \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \\ T \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = h \times i \\ Y = h \times j \\ Z = h \times k \\ T = \Delta T \times n \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} U(X, Y, Z, T) \\ V(X, Y, Z, T) \\ W(X, Y, Z, T) \\ P(X, Y, Z, T) \\ \Theta(X, Y, Z, T) \\ C(X, Y, Z, T) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U^n(i, j, k) \\ V^n(i, j, k) \\ W^n(i, j, k) \\ P^n(i, j, k) \\ \Theta^n(i, j, k) \\ C^n(i, j, k) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(X, Y, Z, T) \\ E(X, Y, Z, T) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^n(i, j, k) \\ E^n(i, j, k) \end{array} \right.$$

\uparrow
連続量

\uparrow
離散量.

Q, E は乱流計算の場合

第2節. 偏微分係数の差分近似

差分近似は、1次精度、2次精度等と呼ばれるが、これは、無視される誤差の次数に関して名づけられる。偏微分係数を差分近似する方法はいろいろあるが、代表的なもののみを示すことにする。

1次精度

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{F(x+\Delta X) - F(x)}{\Delta X} + O(\Delta X) \\ &= \frac{F(x) - F(x-\Delta X)}{\Delta X} + O(\Delta X)\end{aligned}$$

2次精度

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{F(x+\Delta X) - F(x-\Delta X)}{2\Delta X} + O((\Delta X)^2) \\ &= \frac{-F(x+2\Delta X) + 4F(x+\Delta X) - 3F(x)}{2\Delta X} + O((\Delta X)^2) \\ &= \frac{3F(x) - 4F(x-\Delta X) + F(x-2\Delta X)}{2\Delta X} + O((\Delta X)^2) \\ &= \frac{F(x+\Delta X) - F(x)}{\Delta X} + \Delta X F''(x) + O((\Delta X)^2) \\ &= \frac{F(x) - F(x-\Delta X)}{\Delta X} + \Delta X F''(x) + O((\Delta X)^2)\end{aligned}\tag{3-1-1}$$

一次精度

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} &= \frac{F(X+2\Delta X) - 2F(X+\Delta X) + F(X)}{(\Delta X)^2} + O(\Delta X) \\ &= \frac{F(X) - 2F(X-\Delta X) + F(X-2\Delta X)}{(\Delta X)^2} + O(\Delta X) \\ &= \frac{F(X+\Delta X) - 2F(X) + F(X-\Delta X)}{(\Delta X)^2} + O(\Delta X)\end{aligned}$$

F : X を変数に含む関数. たとえば $F(X, Y, Z, T)$

ΔX : X についての差分間隔

$O((\Delta X)^n)$ の意味は、十分に小さい ΔX に対して

$$|O((\Delta X)^n)| \leq (\Delta X)^n M$$

なる M の存在を示す。

第3節 数値計算法 (*)

ところで、微分方程式を数値的に解くには、種々の方法があるが、代表的なものをあげると、

- 1) 差分法……微分方程式を直接差分方程式に書き直しその解を求める方法。(MAC法はこの差分法の一つである。)
- 2) 重み付残差法……試行関数展開してから方程式に重み付関数をかけて場全体で積分し、解を求める方法。(スペクトル法、有限要素法等が含まれる。)

流れの数値計算では、古くから差分法が用いられてきたが、FFT等のComputer用の数値計算法の発達に伴って、重み付残差法に属する解法による計算も盛んに行なわれるようになってきた。有限要素法は構造力学等の主に線形な方程式を扱う分野で威力を発揮しており、境界の形状や要素の大きさに対して柔軟性があるという長所を持っているが、3次元流れに対しては非常に複雑な計算になることや流れの方程式が非線形である故にMAC法に匹敵するほどの精度の良い解を与える試行関数がまだ発見されていないことなどの改良すべき点を持っている。

3-1. 渦度法とMAC法

数値計算法のうち、1)の差分法には、次の2つの方法がある。

1)渦度法……基礎方程式を変形し、流れ関数、渦度などを導入して差分計算する方法。

2)MAC法……基礎方程式をそのまま差分近似して計算する方法。

1)の渦度法は、2次元層流に対しては威力を発揮した。ところが、この手法は3次元流れや乱流になると以下のような欠点を持つことがわかった。

①3次元流に対しては流線関数がベクトルポテンシャルというベクトル量になるため、従属変数の数が増えるし、境界条件の設定が難解な問題になる。

②乱流量量の輸送方程式にはSのような平均流速の空間微分を含む項が存在するので、それをベクトルポテンシャルから求めていたのでは計算が複雑になること。

これに対し、基礎方程式を直接差分する方法。これは、1965年 Harlow と Welch によって考案されMAC法(Marker And Cell method)*と呼ばれているが、この方法によれば、従属変数は速度ベクトル $v(u, v, w)$ と圧力 P の4つのみで、物理量のため境界条件の設定も容易と

なる。また2次元から3次元への拡張も容易である。

MAC法は、計算法としても理解しやすく、精度も良好であるので、渦度法と比較して、室内空気分布などを計算する際には有効な方法と言える。そのほか、計算時間もさほどかからないという実用的な長所も有しており、本論文でもこのMAC法を用いる。MAC法についての詳しい説明は、最初にあげた辻本氏の論文に記載しているので、こちらの方を参照されたい。

第4節.MAC法(22)

◦ 一次精度MAC法

空間差分は、中央差分による二次精度であるが、
時間差分は単なる前進差分による一次精度。

◦ 二次精度MAC法

時間差分にも二次精度をもたらしたもの。

その方法に2つあり。

1) 時間中央化……時間方向にも中央差分を用いて、時間
と空間の差分中心を一致させる。

ex. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dufort Frankel スキーム} \\ \text{Crank Nicolson スキーム} \end{array} \right.$

2) 高階差分項を導入する方法

ex. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Adams-Bashforth スキーム} \\ \text{精密化差分スキーム} \end{array} \right.$

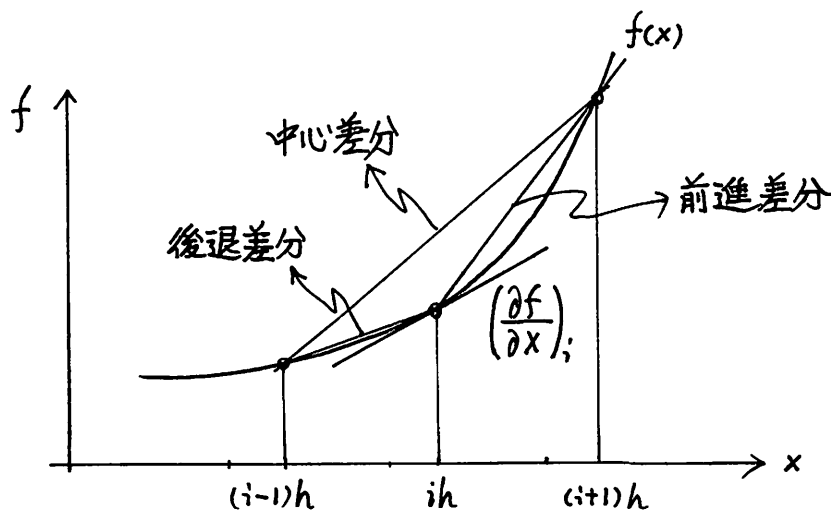
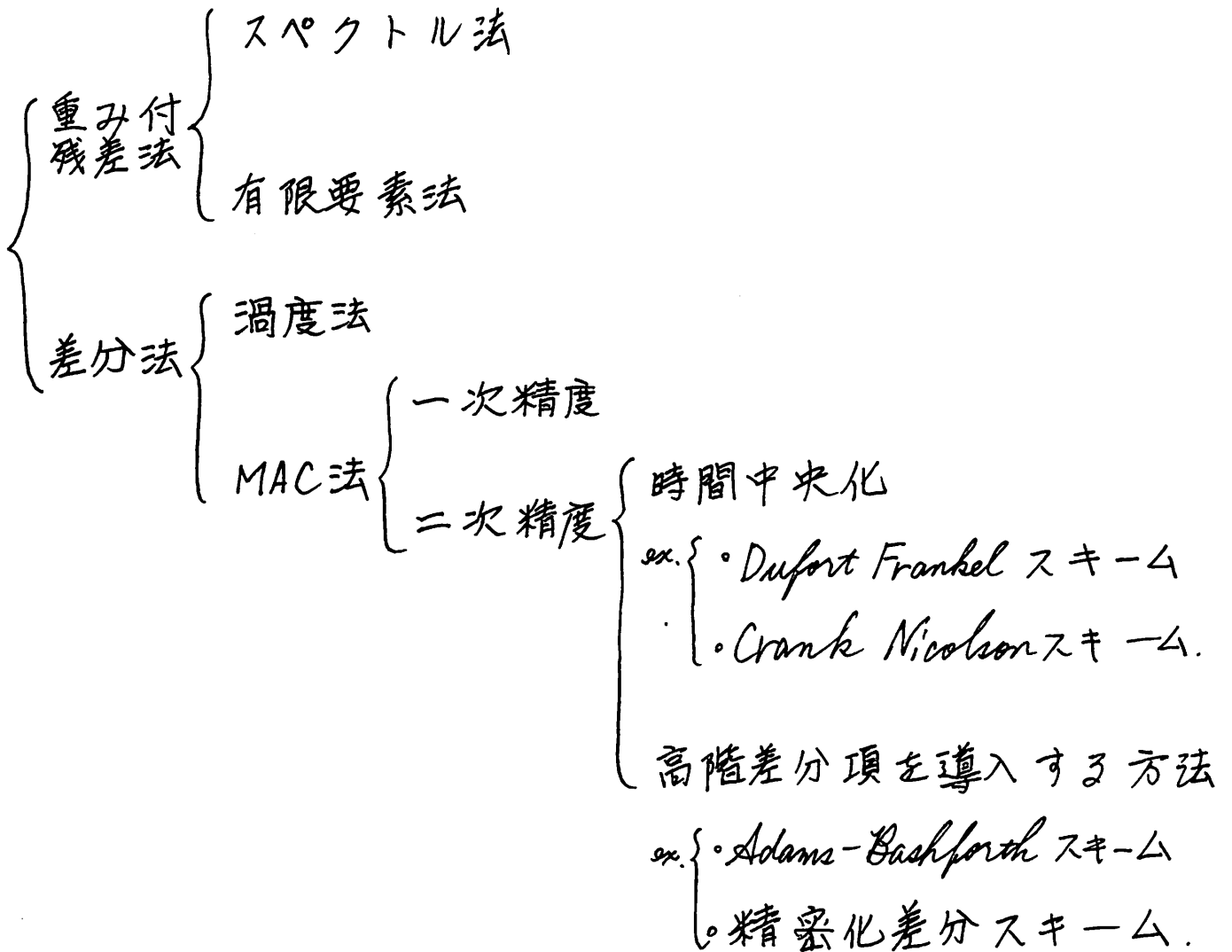


図 差分スキームのいろいろ

数値計算法の分類をまとめると



第Ⅳ章. 差分近似式の作成 (1).

本章では、今まで示してきた基礎方程式を、第III章で紹介したMAC法のうち時間には二次精度を導入した、Adams-Bashforth スキームを用いて差分近似を行う。

第1節. 層流

層流の基礎方程式については、辻本氏の卒論⁽⁴⁾に述べられているものとはほぼ同じである。異なっている点といえば、運動方程式 (Navier-Stokes の方程式) の浮力項のみで、これについては、第2節の乱流のと23で用いたものと同じである。

よって、層流の計算法については、本論文では触れないので、興味のある方は、辻本氏の卒論の p.37~ p.55 を参照願いたい。

第2節 乱流

時間に二次精度を導入するためには、Adams-Bashforthスキームを用いる。

時間差分間隔
空間差分間隔

$$\begin{cases} \Delta T \\ \Delta X \cdots X \text{ 方向} \\ \Delta Y \cdots Y \text{ 方向} \end{cases}$$

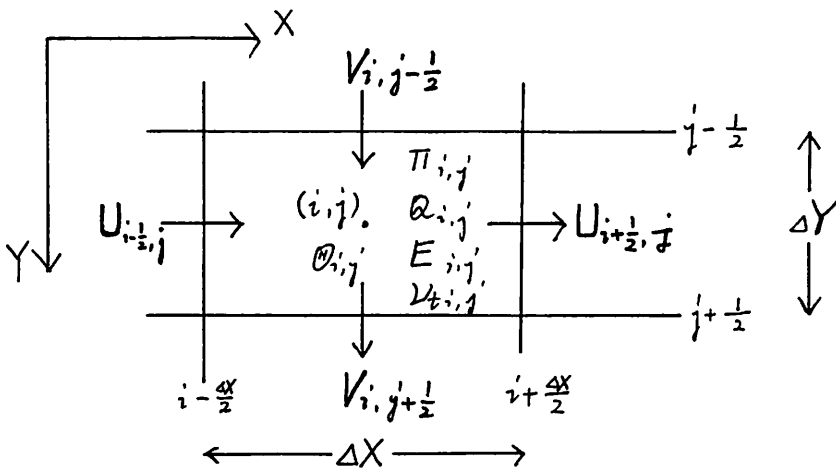


図. 4-1

座標のとり方、セルにおける各量の定義点は上図の通りである。なお定義点にない量は、隣接するものの単純平均、あるいはその点を中心とした4点の平均の値を用いる。

$$(2-4-28) \text{式} \\ \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial \pi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right\} + Ar \ominus \sin \alpha$$

の差分近似式をつくる。

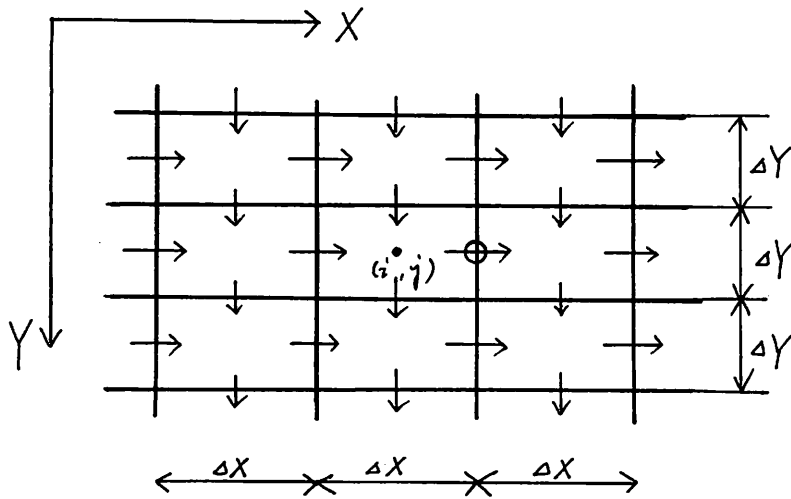


図.4-2

差分中心は $(i+\frac{1}{2}, j)$ である。(図中の○印の点。)

(2-4-28) を変形して。

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left[\frac{\partial}{\partial X} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right\} \right] - \frac{\partial U^2}{\partial X} - \frac{\partial(UV)}{\partial Y} + Ar \ominus \sin \alpha - \frac{\partial \pi}{\partial X} \quad (2-4-28')$$

ここで

$$F = \frac{\partial U}{\partial X}$$

とおき (2-4-28') をそのまま差分近似して次のようにおく。

$$F_{i+\frac{1}{2}, j}^n = L_{i+\frac{1}{2}, j}^n - \frac{\pi_{i+1, j} - \pi_{i, j}}{\Delta X} \quad (4-2-1)$$

ただし

$$\begin{aligned}
L_{i+\frac{1}{2},j}^m &= \frac{2V_{e_{i+1,j}}^m \frac{U_{i+\frac{3}{2},j}^m - U_{i+\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} - 2V_{e_{i,j}}^m \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X}}{\Delta X} \\
&+ \frac{V_{e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^m \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - U_{i+\frac{3}{2},j}^m}{\Delta Y} + \frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^m - V_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{\Delta X} \right) - V_{e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^m \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - U_{i+\frac{3}{2},j}^m}{\Delta Y} + \frac{V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^m - V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta X} \right)}{\Delta Y} \\
&- \frac{(U_{i+1,j}^m)^2 - (U_{i,j}^m)^2}{\Delta X} - \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta Y} \\
&+ Ar \frac{\Theta_{i+1,j}^m + \Theta_{i,j}^m}{2} \sin \alpha \\
&= \frac{2V_{e_{i+1,j}}^m \frac{U_{i+\frac{3}{2},j}^m - U_{i+\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} - 2V_{e_{i,j}}^m \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X}}{\Delta X} \\
&+ \frac{V_{e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^m \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^m - U_{i+\frac{3}{2},j}^m}{\Delta Y} + \frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^m - V_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{\Delta X} \right) - V_{e_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^m \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - U_{i+\frac{3}{2},j}^m}{\Delta Y} + \frac{V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^m - V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta X} \right)}{\Delta Y} \\
&- \frac{\left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m + U_{i+\frac{3}{2},j}^m}{2} \right)^2 - \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m + U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{2} \right)^2}{\Delta X} \\
&- \frac{\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m + U_{i+\frac{1}{2},j+1}^m}{2} \cdot \frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^m + V_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{2} - \frac{U_{i+\frac{1}{2},j-1}^m + U_{i+\frac{1}{2},j}^m}{2} \cdot \frac{V_{i,j-\frac{1}{2}}^m + V_{i+1,j-\frac{1}{2}}^m}{2}}{\Delta Y} \\
&+ Ar \frac{\Theta_{i+1,j}^m + \Theta_{i,j}^m}{2} \sin \alpha \tag{4-2-2}
\end{aligned}$$

$$V_{e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^m = \frac{V_{e_{i+1,j+1}}^m + V_{e_{i,j+1}}^m + V_{e_{i+1,j}}^m + V_{e_{i,j}}^m}{4} \tag{4-2-3}$$

(4-2-3) は、4点平均を用いていることに注意。)

時間に二次精度を導入するために、Adams-Bashforthスキームを用いる。

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = U_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta T \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$$

上式において $\partial U / \partial T$ に (4-2-1) を代入し、右辺第三項の $\partial / \partial T$ に、 n 時点からの後退差分を用いると、

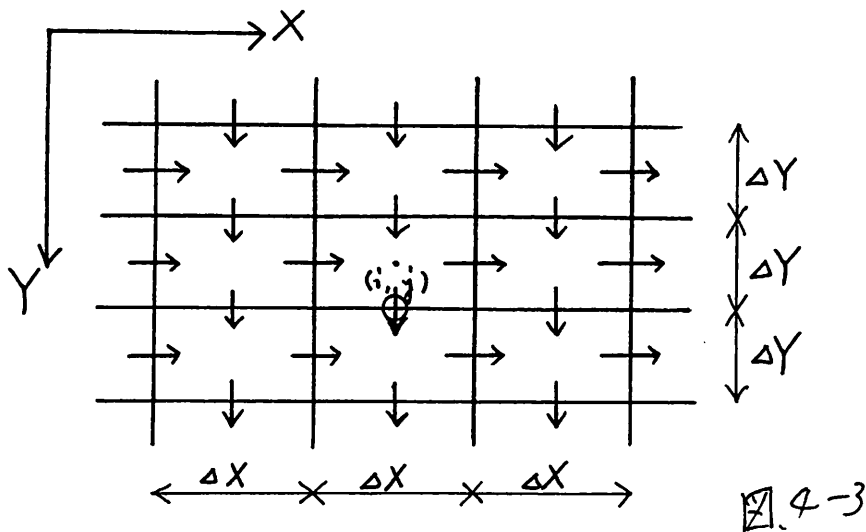
$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= U_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta T \cdot F_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1}}{\Delta T} \\ &= U_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{3}{2} \Delta T \cdot F_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{1}{2} \Delta T \cdot F_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

よって (2-4-28) の差分近似式は、(4-2-1), (4-2-2), (4-2-3) (4-2-4) である。

(2-4-29) 式

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} - Ar \theta \cos \alpha$$

の差分近似式をつくる。

差分中心は $(i, j + \frac{1}{2})$ 。図中の○印の点である。

(2-4-29) を変形して

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left[\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_e \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ 2\nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right\} - \frac{\partial(UV)}{\partial X} - \frac{\partial V^2}{\partial Y} - Ar \theta \cos \alpha \right] - \frac{\partial \Pi}{\partial Y} \quad (2-4-29')$$

ここで、同様に

$$G = \frac{\partial V}{\partial T}$$

とおき、(2-4-29') をそのまま差分近似式に書き下す。

$$G_{i, j+\frac{1}{2}}^n = M_{i, j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Pi_{i, j+\frac{1}{2}}^n - \Pi_{i, j}^n}{\Delta Y} \quad (4-2-5)$$

$$\begin{aligned}
M_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\psi_{e^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta X} + \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta Y} \right) - \psi_{e^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta X} + \frac{U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{2\psi_{e^{i,j+1}}^n \frac{V_{i,j+\frac{3}{2}}^n - V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} - 2\psi_{e^{i,j}}^n \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y}}{\Delta Y} \\
&- \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta X} - \frac{(V_{i,j+1}^n)^2 - (V_{i,j}^n)^2}{\Delta Y} - Ar \Theta_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cos \alpha \\
&= \frac{\psi_{e^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta X} + \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta Y} \right) - \psi_{e^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta X} + \frac{U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{2\psi_{e^{i,j+1}}^n \frac{V_{i,j+\frac{3}{2}}^n - V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} - 2\psi_{e^{i,j}}^n \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y}}{\Delta Y} \\
&- \frac{\left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2} \right) \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{3}{2}}^n}{2} \right) - \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2} \right) \left(\frac{V_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{2} \right)}{\Delta X} \\
&- \frac{\left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j+\frac{3}{2}}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2} \right)^2}{\Delta Y} - Ar \frac{\Theta_{i,j+1}^n + \Theta_{i,j}^n}{2} \cos \alpha
\end{aligned}$$

.... (4-2-6)

$$\psi_{e^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n = \frac{\psi_{e^{i+1,j+1}}^n + \psi_{e^{i,j+1}}^n + \psi_{e^{i+1,j}}^n + \psi_{e^{i,j}}^n}{4} \quad (4-2-7)$$

時間に二精度を導入するため Adams-Bashforth スキームを用いる。

$$V^{n+1} = V^n + \Delta T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)$$

上式の $\partial V / \partial T$ に (4-2-5) 式を代入し、右辺第三項の $\partial / \partial T$ に n 時点からの後退差分を用いて、

$$\begin{aligned} V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \Delta T \cdot G_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta T} \\ &= V_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} \Delta T G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta T}{2} \cdot G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4-2-8)$$

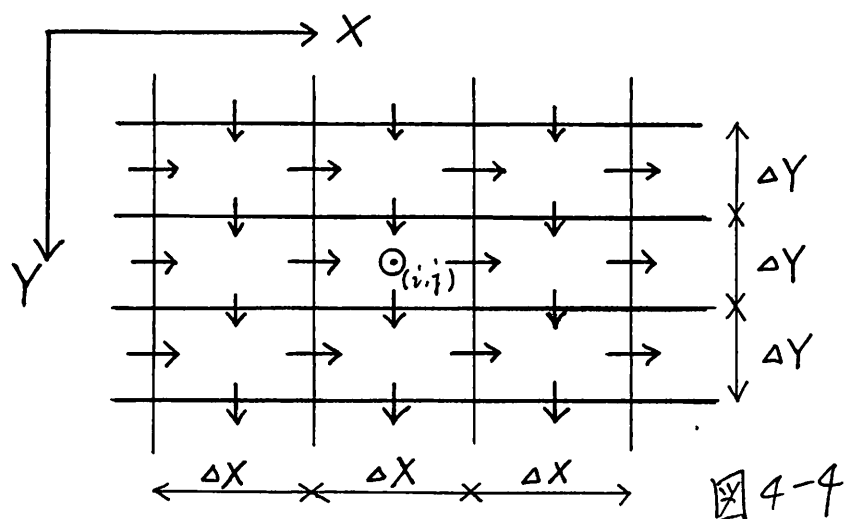
以上より、(2-4-29) の差分近似式は、(4-2-5), (4-2-6), (4-2-7), (4-2-8) である。

(2-4-30)式

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(UH)}{\partial X} + \frac{\partial(VH)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0 \frac{\partial H}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial H}{\partial Y} \right\} \quad (2-4-30)$$

(ただし, $\nu_0 = a + \frac{\nu_t}{\sigma_0}$ (2-4-30'))

の差分近似式をつくる。



差分中心は、 (i, j) 。図中の○印の点。

(2-4-30)を変形して

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_0 \frac{\partial H}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_0 \frac{\partial H}{\partial Y} \right\} - \frac{\partial(UH)}{\partial X} - \frac{\partial(VH)}{\partial Y} \quad (2-4-30'')$$

ここで

$$H = \frac{\partial H}{\partial T}$$

とおいて、(2-4-30'')を差分近似する。

$$\begin{aligned}
H_{ij}^n &= \frac{V_{\theta_{i+\frac{1}{2},j}}^n \left(\frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i,j}^n}{\Delta X} \right) - V_{\theta_{i-\frac{1}{2},j}}^n \left(\frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{V_{\theta_{i,j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j}^n}{\Delta Y} \right) - V_{\theta_{i,j-\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i,j-1}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&- \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n \theta_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \theta_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} - \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \theta_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \theta_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \\
&= \frac{\left(\frac{V_{\theta_{i,j}}^n + V_{\theta_{i+1,j}}^n}{2} \right) \left(\frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i,j}^n}{\Delta X} \right) - \left(\frac{V_{\theta_{i,j}}^n + V_{\theta_{i-1,j}}^n}{2} \right) \left(\frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{\left(\frac{V_{\theta_{i,j}}^n + V_{\theta_{i,j+1}}^n}{2} \right) \left(\frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j}^n}{\Delta Y} \right) - \left(\frac{V_{\theta_{i,j}}^n + V_{\theta_{i,j-1}}^n}{2} \right) \left(\frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i,j-1}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&- \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{\theta_{i,j}^n + \theta_{i+1,j}^n}{2} \right) - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{\theta_{i-1,j}^n + \theta_{i,j}^n}{2} \right)}{\Delta X} \\
&- \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\theta_{i,j}^n + \theta_{i,j+1}^n}{2} \right) - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\theta_{i,j-1}^n + \theta_{i,j}^n}{2} \right)}{\Delta Y} \quad (4-2-9)
\end{aligned}$$

Adams - Bashforth スキームを用いて

$$\Theta_{ij}^{n+1} = \Theta_{ij}^n + \Delta T \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} \right)$$

この式の $\partial \Theta / \partial T$ に H_{ij}^n , $\partial / \partial T$ に n 時点からの後退差分を用いて.

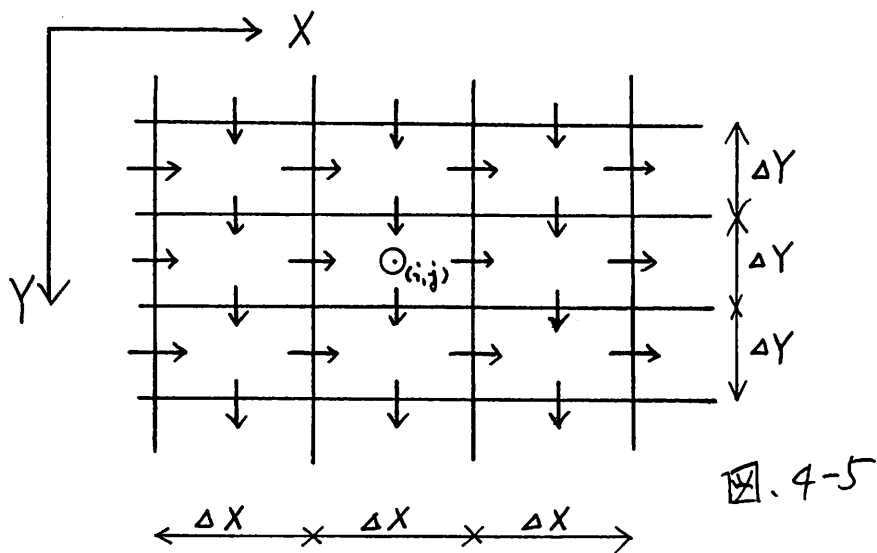
$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{n+1} &= \Theta_{ij}^n + \Delta T \cdot H_{ij}^n + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{H_{ij}^n - H_{ij}^{n-1}}{\Delta T} \\ &= \Theta_{ij}^n + \frac{3}{2} \Delta T \cdot H_{ij}^n - \frac{1}{2} \Delta T \cdot H_{ij}^{n-1} \end{aligned} \quad (4-2-10)$$

よって (2-4-30) の差分近似式は, (4-2-9), (4-2-10) である。

乱流エネルギー(8)の輸送方程式(2-4-31)の差分近似式
をつくる。

$$\frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial(QU)}{\partial X} + \frac{\partial(QV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_t^* \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_t^* \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_t^* S - E$$

$$- Ar \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial X} \sin \alpha + Ar \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \cos \alpha \quad (2-4-31)$$



差分中心は (i, j) 。図中の○印の点である。

(2-4-31)を変形して

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_t \frac{\partial Q}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_t \frac{\partial Q}{\partial Y} \right\} + \nu_t S - E - Ar \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial X} \sin \alpha$$

$$+ Ar \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \cos \alpha - \frac{\partial(QU)}{\partial X} - \frac{\partial(QV)}{\partial Y} \quad (2-4-31')$$

$$f = \frac{\partial Q}{\partial T}$$

とおき、(2-4-31')を差分近似する。

$$\begin{aligned}
f_{ij}^m &= \frac{V_{i+\frac{1}{2},j}^m \cdot \left(\frac{Q_{i+1,j}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta X} \right) - V_{i-\frac{1}{2},j}^m \cdot \left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i-1,j}^m}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^m \cdot \left(\frac{Q_{i,j+1}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta Y} \right) - V_{i,j-\frac{1}{2}}^m \cdot \left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i,j-1}^m}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&+ V_{i,j}^m \cdot S_{ij}^m - E_{ij}^m - Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{\Theta_{i+\frac{1}{2},j}^m - \Theta_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} \sin \alpha + Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{\Theta_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \Theta_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta Y} \cos \alpha \\
&- \frac{Q_{i+\frac{1}{2},j}^m U_{i+\frac{1}{2},j}^m - Q_{i-\frac{1}{2},j}^m U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} - \frac{Q_{i,j+\frac{1}{2}}^m V_{i,j+\frac{1}{2}}^m - Q_{i,j-\frac{1}{2}}^m V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta Y} \\
&= \frac{\left(\frac{V_{i+1,j}^m + V_{i,j}^m}{2} \right) \left(\frac{Q_{i+1,j}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta X} \right) - \left(\frac{V_{i,j}^m + V_{i-1,j}^m}{2} \right) \left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i-1,j}^m}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{\left(\frac{V_{i,j+1}^m + V_{i,j}^m}{2} \right) \left(\frac{Q_{i,j+1}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta Y} \right) - \left(\frac{V_{i,j}^m + V_{i,j-1}^m}{2} \right) \left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i,j-1}^m}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&+ V_{i,j}^m \cdot S_{ij}^m - E_{ij}^m - Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{\Theta_{i+\frac{1}{2},j}^m - \Theta_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} \sin \alpha + Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{\Theta_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \Theta_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta Y} \cos \alpha \\
&- \frac{\left(\frac{Q_{i+1,j}^m + Q_{i,j}^m}{2} \right) \cdot U_{i+\frac{1}{2},j}^m - \left(\frac{Q_{i,j}^m + Q_{i-1,j}^m}{2} \right) \cdot U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{\Delta X} \\
&- \frac{\left(\frac{Q_{i,j+1}^m + Q_{i,j}^m}{2} \right) \cdot V_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \left(\frac{Q_{i,j}^m + Q_{i,j-1}^m}{2} \right) \cdot V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta Y}
\end{aligned} \tag{4-2-11}$$

Adams-Bashforth スキームを用いる。

$$\begin{aligned}
 Q_{ij}^{n+1} &= Q_{ij}^n + \Delta T \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right) + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right) \\
 &= Q_{ij}^n + \Delta T \cdot f_{ij}^n + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{f_{ij}^n - f_{ij}^{n-1}}{\Delta T} \\
 &= Q_{ij}^n + \frac{3}{2} \Delta T \cdot f_{ij}^n + \frac{1}{2} \Delta T \cdot f_{ij}^{n-1} \quad (4-2-12)
 \end{aligned}$$

(4-2-11) 中の S_{ij}^n を求める必要がある。これは、(2-4-32) を差分中心 (i, j) で、差分近似して求める。

$$S = 2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (2-4-32)$$

よ、て

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^n &= 2 \left\{ \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{V_{i+\frac{1}{2},j}^n - V_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} + \frac{U_{i,j+\frac{1}{2}}^n - U_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right)^2 \\
 &= 2 \left\{ \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right)^2 \right. \\
 &\quad + \left. \left\{ \frac{\left(\frac{V_{i+\frac{1}{2},j}^n + V_{i-\frac{1}{2},j}^n + V_{i+\frac{1}{2},j}^n + V_{i-\frac{1}{2},j}^n}{4} \right) - \left(\frac{V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{4} \right)}{\Delta X} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n + U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n}{4} \right) - \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n + U_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i+\frac{1}{2},j-1}^n + U_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{4} \right)}{\Delta Y} \right\}^2 \right\} \\
 &\quad \dots (4-2-13)
 \end{aligned}$$

([注] $V_{i+\frac{1}{2},j}^n, V_{i-\frac{1}{2},j}^n, U_{i,j+\frac{1}{2}}^n, U_{i,j-\frac{1}{2}}^n$ に 4 点平均を用いた。)

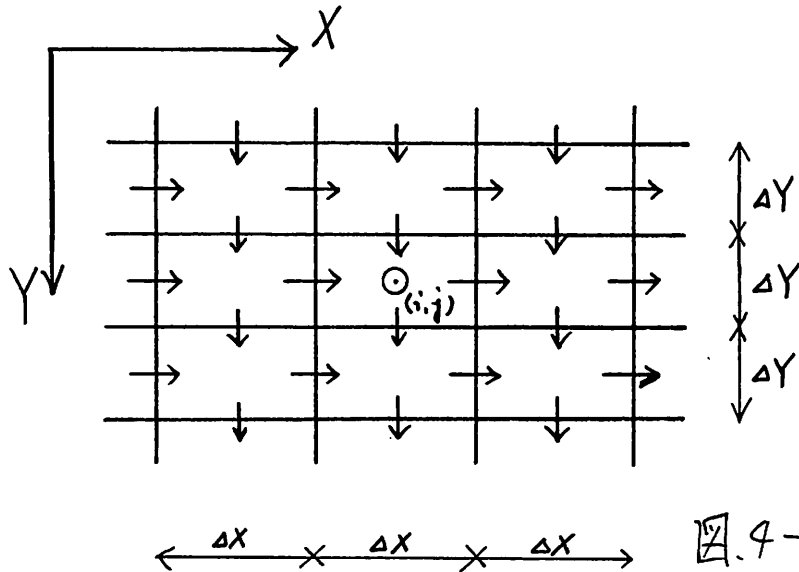
ゆえに、(4-2-11), (4-2-12), (4-2-13) が (2-4-31) の差分近似式である。

粘性逸散率(ϵ)の輸送方程式 (2-4-33)

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial(EU)}{\partial X} + \frac{\partial(EV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_t \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_t \frac{\partial E}{\partial Y} \right\} + C_1 \nu_t S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_t} E$$

.... (2-4-33)

の差分近似式をつくる。



差分中心は、図中の○印の点。(i, j)

(2-4-33)を変形して

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \nu_t \frac{\partial E}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \nu_t \frac{\partial E}{\partial Y} \right\} + C_1 \nu_t S \frac{E}{Q} - C_2 \frac{Q}{\nu_t} E.$$

$$-\frac{\partial(EU)}{\partial X} - \frac{\partial(EV)}{\partial Y} \quad (2-4-33')$$

そこで

$$g = \frac{\partial E}{\partial T}$$

と置いて、(2-4-33')の差分近似式をつくる。

$$\begin{aligned}
g_{ij}^n &= \frac{V_{\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}}^n \cdot \left(\frac{E_{i+1,j}^n - E_{ij}^n}{\Delta X} \right) - V_{\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}}^n \cdot \left(\frac{E_{ij}^n - E_{i-1,j}^n}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{V_{\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}}^n \cdot \left(\frac{E_{i,j+1}^n - E_{ij}^n}{\Delta Y} \right) - V_{\varepsilon_{i,j-\frac{1}{2}}}^n \cdot \left(\frac{E_{ij}^n - E_{i,j-1}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&+ C_1 V_{\varepsilon_{ij}}^n \cdot S_{ij}^n \frac{E_{ij}^n}{Q_{ij}^n} - C_2 \frac{Q_{ij}^n E_{ij}^n}{V_{\varepsilon_{ij}}^n} \\
&- \frac{E_{i+\frac{1}{2},j}^n U_{i+\frac{1}{2},j}^n - E_{i-\frac{1}{2},j}^n U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} - \frac{E_{i,j+\frac{1}{2}}^n V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - E_{i,j-\frac{1}{2}}^n V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \\
&= \frac{\left(\frac{V_{\varepsilon_{i+1,j}}^n + V_{\varepsilon_{ij}}^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{E_{i+1,j}^n - E_{ij}^n}{\Delta X} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon_{ij}}^n + V_{\varepsilon_{i-1,j}}^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{E_{ij}^n - E_{i-1,j}^n}{\Delta X} \right)}{\Delta X} \\
&+ \frac{\left(\frac{V_{\varepsilon_{i,j+1}}^n + V_{\varepsilon_{ij}}^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{E_{i,j+1}^n - E_{ij}^n}{\Delta Y} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon_{ij}}^n + V_{\varepsilon_{i,j-1}}^n}{2} \right) \cdot \left(\frac{E_{ij}^n - E_{i,j-1}^n}{\Delta Y} \right)}{\Delta Y} \\
&+ C_1 V_{\varepsilon_{ij}}^n S_{ij}^n \frac{E_{ij}^n}{Q_{ij}^n} - C_2 \frac{Q_{ij}^n E_{ij}^n}{V_{\varepsilon_{ij}}^n} \\
&- \frac{\left(\frac{E_{i+\frac{1}{2},j}^n + E_{ij}^n}{2} \right) \cdot U_{i+\frac{1}{2},j}^n - \left(\frac{E_{i-\frac{1}{2},j}^n + E_{ij}^n}{2} \right) \cdot U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} \\
&- \frac{\left(\frac{E_{i,j+\frac{1}{2}}^n + E_{ij}^n}{2} \right) \cdot U_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{E_{ij}^n + E_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2} \right) \cdot U_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y}
\end{aligned} \tag{4-2-14}$$

時間に二次精度を導入するため、Adams-Bashforthスキームを使用する。

$$\begin{aligned}
 E_{ij}^{n+1} &= E_{ij}^n + \Delta T \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) + \frac{(\Delta T)^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) \\
 &= E_{ij}^n + \Delta T \cdot g_{ij}^n + \frac{(\Delta T)^2}{2} \frac{g_{ij}^n - g_{ij}^{n-1}}{\Delta T} \\
 &= E_{ij}^n + \frac{3}{2} \Delta T g_{ij}^n - \frac{1}{2} \Delta T g_{ij}^{n-1} \quad (4-2-15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^n &= 2 \left\{ \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta X} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Y} \right)^2 \right\} \\
 &\quad + \left(\frac{V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{4 \Delta X} + \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + U_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - U_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - U_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{4 \Delta Y} \right)^2 \\
 &\quad \dots (4-2-13)
 \end{aligned}$$

以上より、(2-4-33)の差分近似式は、(4-2-14)、(4-2-15)、(4-2-13)である。

(2-4-34) の差分近似式をつくる。

$$V_t = C_0 \frac{Q^2}{E} \quad (2-4-34)$$

だから (i, j) を差分中心とすると

$$V_{t,ij}^m = C_0 \frac{(Q_{ij}^m)^2}{E_{ij}^m} \quad (4-2-16)$$

また. (2-4-29'), (2-4-30'), (2-4-32), (2-4-33)より

$$V_{e,ij}^m = V_{t,ij}^m + \frac{1}{Re} \quad (4-2-17)$$

$$V_{\theta,ij}^m = \frac{V_{t,ij}^m}{\sigma_\theta} + a \quad (4-2-18)$$

$$V_{\rho,ij}^m = \frac{V_{t,ij}^m}{\sigma_r} + \frac{1}{Re} \quad (4-2-19)$$

$$V_{\varepsilon,ij}^m = \frac{V_{t,ij}^m}{\sigma_z} + \frac{1}{Re} \quad (4-2-20)$$

第Ⅴ章. プログラム解説 (1)

第1節 序

本論文で今回使用したプログラムは、本論文の出発点になっている論文、辻本総「火災時の煙流動に関する実験的研究」(卒論, 1977)において使用されたプログラムを一部、別々通路が傾いたことにより変化する個所を変更して用いたのであるが、セルの大きさ、代表長さ等の代表値、初期条件その他は変更せず、ほとんどそのまま用いた。そこで本章では、詳しい解説は避け、エッセンスのみを引用することにした。詳しい説明を必要とされる方は、辻本氏の論文を参照されたい。

なお、本実験で用いた基礎方程式は、第二章4節で述べたものを、第四章のように差分近似したものを用いた。また付録として、基礎方程式-プログラム対応表、フローチャートを添えておく。

第2節. プログラムの準備.

準備 (I)

2-1. メッシュの切り方、セルの大きさ.

メッシュの切り方は、下図のようは、X方向47
うち外側の2つは仮想セル)、Y方向に24(うち上と下の
2層は仮想セル)となる。

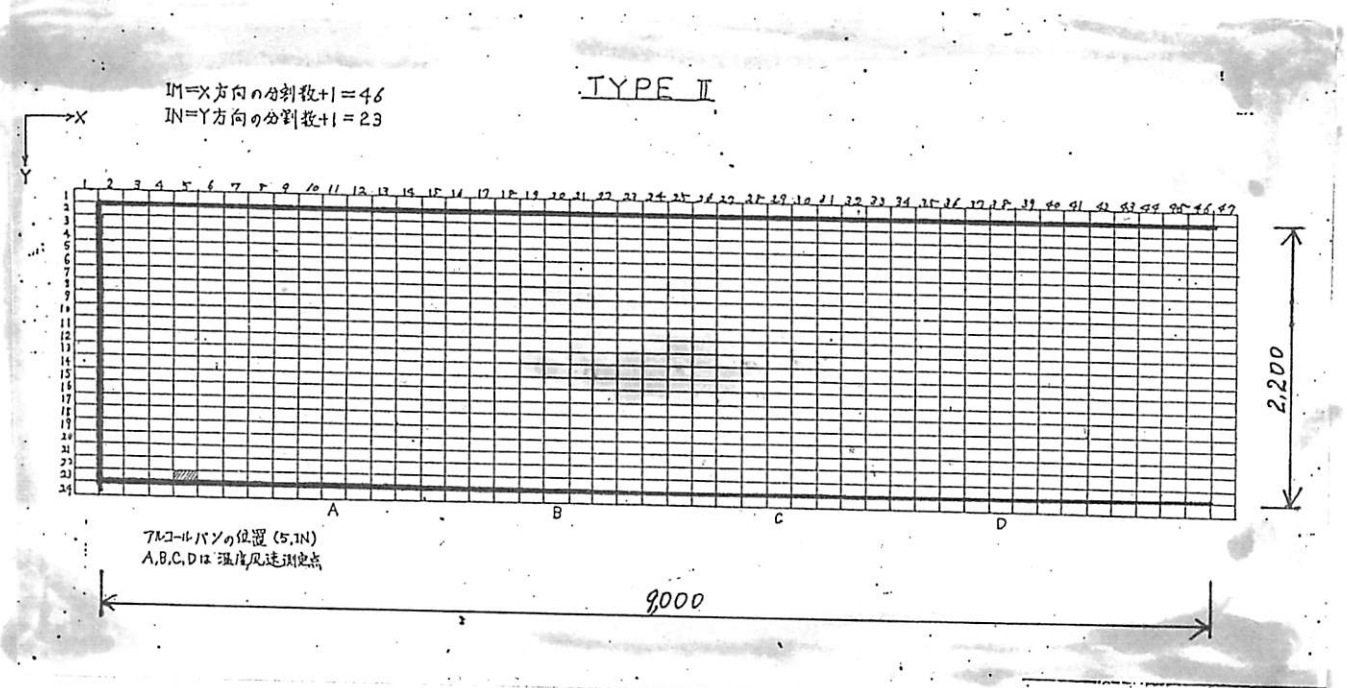


図 5-1

1つのセルの大きさは、右図
のような、10(cm) X 20(cm)の大きさ、
形となる。

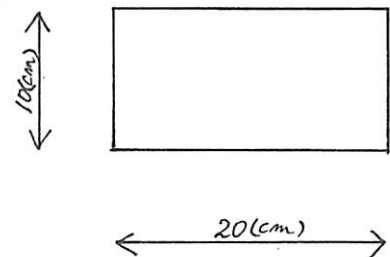


図 5-2

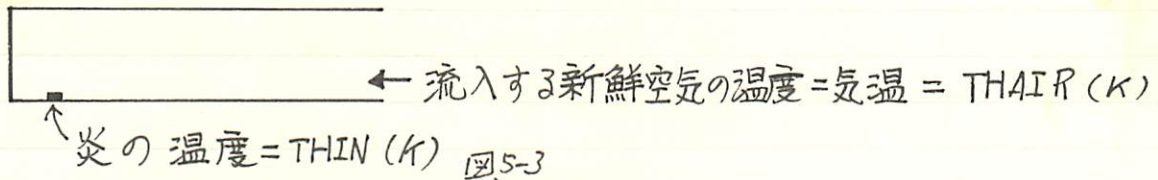
2-2 代表長さ、代表速度、代表温度差.

これらの定数は、無次元化に必要な値であるが、以下のように定めた。

◦代表長さ (L_0) = 耐熱風洞の高さ = 220 (cm)

◦代表速度、代表温度差.

この2つは互いに関連している。先ず代表温度差 ($\Delta \theta_0$) について述べる。



$$\underline{\text{代表温度差 } (\Delta \theta_0) = THIN - THAIR} \quad (5-2-1)$$

と定める。無次元温度 0 を気温、1 を炎の温度とし、温度 θ (K) は次式により無次元温度 θ に変換される。

$$\theta = \frac{\theta - THAIR}{\Delta \theta_0} = \frac{\theta - THAIR}{THIN - THAIR} \quad (\text{注1}) \quad (5-2-2)$$

代表速度 (V_0) は.

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{g \beta \Delta \theta_0 L_0} \\ &= \sqrt{g \frac{1}{THIN} (THIN - THAIR) \cdot L_0} \end{aligned} \quad (5-2-3)$$

この時

$$Ar = \frac{g \beta \Delta \theta_0 L_0}{V_0^2} = 1 \quad (5-2-4)$$

となるから、 $Ar = 1$ となるように代表速度 V_0 を決めたとになる。

注1)第2章4節. 4-2に出てくる各方程式中に使われている θ とは、少し意味を異にするので注意。下図参照。

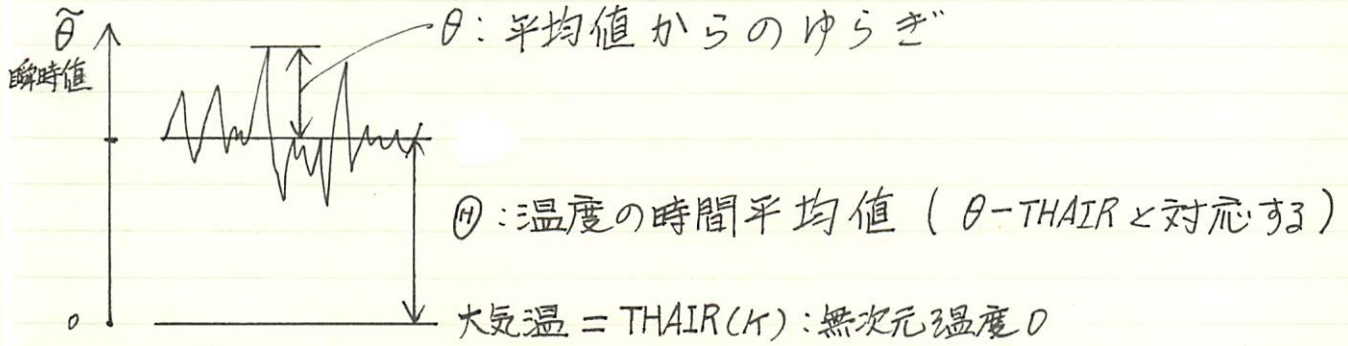


図5-4

2章の方程式における θ

2-3. 無次元時間の設定

1つのセルにおいて、無次元時間 DT の間に、考えられる最高の無次元速度1の進む距離がセルから出ないことが安定条件であり、

$$DT = 0.002$$

とした。

$$DY^* = \frac{DY}{L_0} \quad \therefore DY = DY^* L_0$$

$$V^* = \frac{v}{V_0} \quad \therefore v = V^* V_0$$

$$T^* = \frac{t}{T_0} \quad \therefore t = T^* T_0$$

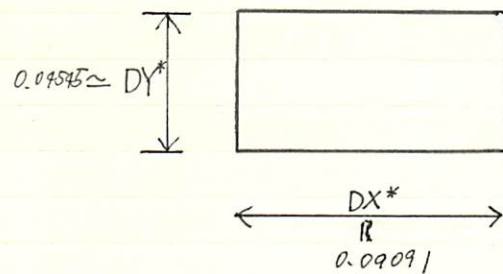


図. 5-5

条件は、

$$DY \geq v_{max} t$$

(5-2-5)

$$DY^* L_0 \geq V^* V_0 T^* T_0 \quad (v_{max} \text{ のとき、則ち } v = V_0$$

$$DY^* L_0 \geq V_0 T^* T_0 \quad \text{のとき } V^* = 1 \text{ だから})$$

$$DY^* \Delta_0 \geq V_0 T^* \frac{\Delta_0}{V_0} \quad \left(\because T_0 = \frac{L_0}{V_0} \right)$$

$$0.04545 \approx DY^* \geq T^*$$

(一般的には $DY^* \geq V^* T^*$ である)
(5-2-5')

となるように T^* 、すなわち DT を決めればよい。

2-4. その他の定数の値の設定

i) 基礎方程式では、

$$\sigma_1 = 1.0$$

$$\sigma_2 = 1.3$$

$$\sigma_3 = 1.0$$

$$C_0 = 0.09$$

$$C_1 = 1.59$$

$$C_2 = 0.18$$

$$C_3 = 0.0$$

ii) その他の定数

- ・ 炎における l_0 ----- 0.33
- ・ 開放された自由端における l_0 ----- 0.33
- ・ 加速定数 ----- 1.40
- ・ 収束判定定数 ----- 0.002
- ・ 渦動粘性係数の一定値 ----- 0.1
($K=KSTEP$ まで)

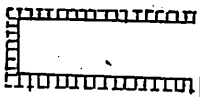
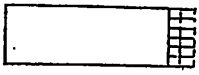

第3節. 初期条件と境界条件

3-1. 初期条件.

- ① すべての点で、 $Q(I, J) = 0.1, E(I, J) = 0.6338$ と与えた。
- ② 炎における温度として、 $TH(5, IN) = 1.0$ と与えた。
- ③ その他はすべて 0 とおいた。

3-2. 境界条件

表. 5-1.

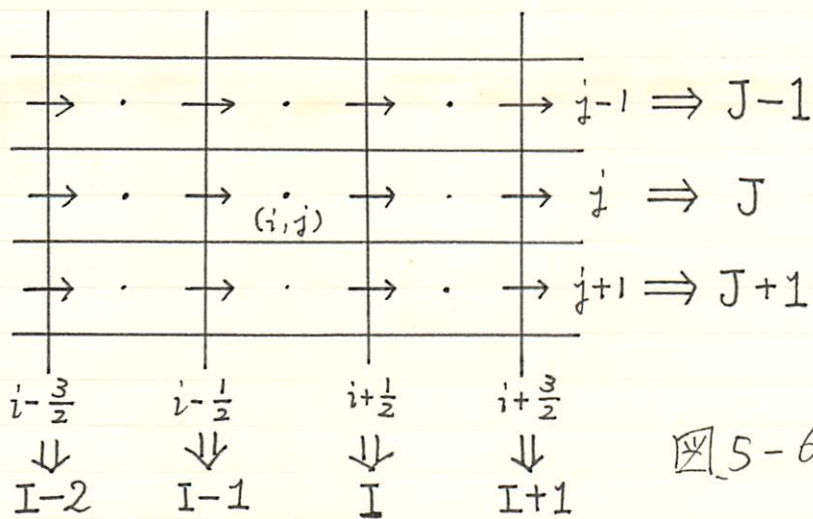
部位 変数記号	壁面 	自由端 	炎 
④ TH	$TH_{\text{左}} = TH_{\text{右}}$	風向きにより変化 $U(I, J) \geq 0$ ならば $TH(I+1, J) = TH(I, J)$ $U(I, J) < 0$ ならば $TH(I+1, J) = THAIR$	$TH(5, IN) = THIN$
Q	$Q_{\text{左}} = -Q_{\text{右}}$	風向きにより変化 $U(I, J) \geq 0$ ならば $Q(I+1, J) = Q(I, J)$ $U(I, J) < 0$ ならば $Q(I+1, J) = 0.01 U(I, J)$	$Q(5, IN) = 0.01 \cdot V(5, IN-1)^2$
E	$E_{\text{左}} = -E_{\text{右}}$	風向きにより変化 $U(I, J) \geq 0$ ならば $E(I+1, J) = E(I, J)$ $U(I, J) < 0$ ならば $E(I+1, J) = C_0 Q(I, J)^{\frac{1}{2}} / LIN$	$E(5, IN) = C_0 \cdot Q(5, IN)^{\frac{1}{2}} / INPUT$
D	$D_{\text{左}} = -D_{\text{右}}$	風向きにより変化 $U(I, J) \geq 0$ ならば $D(I+1, J) = D(I, J)$ $U(I, J) < 0$ ならば $D(I+1, J) = Q(I, J)^{\frac{1}{2}} / LIN$	$D(5, IN) = C_0 \cdot Q(5, IN)^{\frac{1}{2}} / E(5, IN)$
U	$U_{\text{左}} = -U_{\text{右}}$	仮想セルで連続の式をみなすように。 $U(I+1, J) = U(I, J) - \frac{DX}{DY} \{V(I+1, J) - V(I, J)\}$	考えない
V	$V_{\text{左}} = -V_{\text{右}}$	$V_{\text{左}} = V_{\text{右}}$	考えない
P	$P_{\text{左}} = 0$	$P_{\text{左}} = 0$	考えない

第4節. プログラムで使用した記号について.

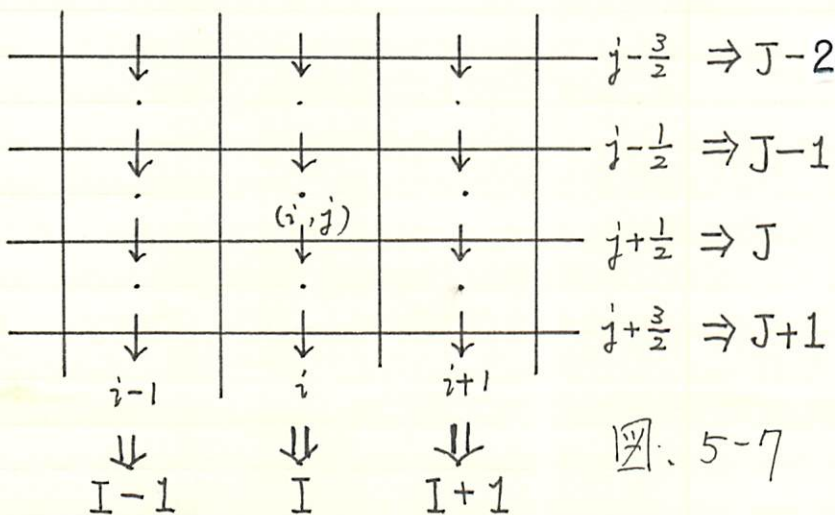
4-1. 添字について.

配列

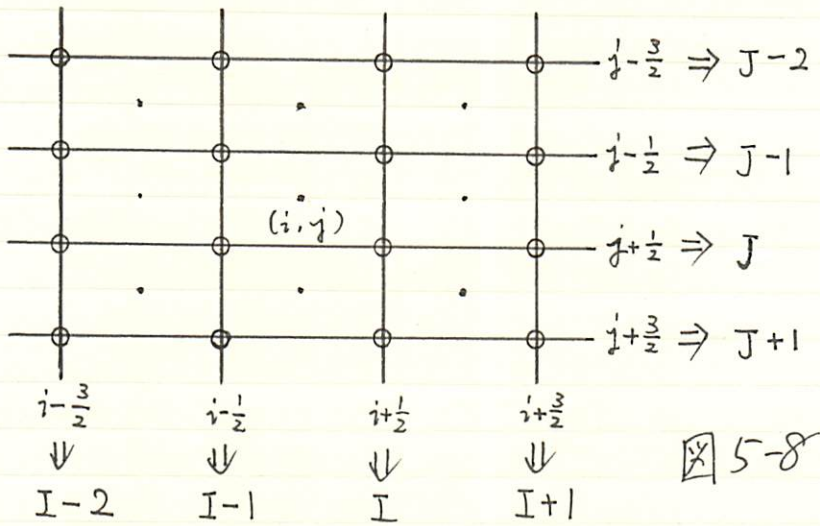
たとえば、 $U_{i+\frac{1}{2},j}$ という風速を表わすのに、配列の添字に $i+\frac{1}{2}$ というのは許されない。そこで、 $U_{i+\frac{1}{2},j}$ は $U(I,J)$ と表現する。下図を参照されたい。



同様に、 $V_{i,j+\frac{1}{2}}$ は $V(I,J)$ と表現する。下図参照



さらに、 $D_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ は、 $DD(I, J)$ で表現する。下図参照。



その他のセル中心で定義されている量は、セル中心の位置座標がそのまま添字となる。たとえば、 $TH(I, J)$, $Q(I, J)$, $E(I, J)$ 等となる。

4-2. プログラムにおける記号の意味 表 2-2.

プログラム 記号	意 味	プログラム 記号	意 味
U	水平速度		の計算をさせる。
V	垂直速度	ZCD	$C_0 = 0.09$
Q	乱流エネルギー	ZC1	$C_1 = 1.59$
E	エネルギー逸散率	ZC2	$C_2 = 0.18$
D	セル中心における Δx	ZS1	$\sigma_1 = 1.0$
DD	格子点における Δx	ZS2	$\sigma_2 = 1.3$
IM	X方向の分割数+1	ZS3	$\sigma_0 = 1.0$
IN	Y方向の分割数+1	ACCEL	加速定数
DX	水平方向の差分間隔	EPS	ϵ : 収束判定条件
DY	垂直方向の差分間隔	DO	$K=KSTEP$ まで、渦動粘性係数一定の計算をさせる。その時までの渦動粘性係数の値。
DT	時間差分間隔		
T	$T = \Delta T \cdot K$		
K	ステップ回数		
AL	L^n (N-S方程式中の)		
BL	L^{n-1} (")	FN	$F^n = \frac{\partial U^n}{\partial T}$
AM	M^n (")		
BM	M^{n-1} (")	GN	$G^n = \frac{\partial V^n}{\partial T}$
F	$f^n = \frac{\partial Q^n}{\partial T}$	FT	$F^{n-1} = \frac{\partial U^{n-1}}{\partial T}$
FF	$f^{n-1} = \frac{\partial Q^{n-1}}{\partial T}$	GT	$G^{n-1} = \frac{\partial V^{n-1}}{\partial T}$
G	$g^n = \frac{\partial E^n}{\partial T}$	H	$H^n = \frac{\partial \theta^n}{\partial T}$
GG	$g^{n-1} = \frac{\partial E^{n-1}}{\partial T}$	HT	$H^{n-1} = \frac{\partial \theta^{n-1}}{\partial T}$
PN	ポアソン方程式を解く時の反復前の左カ	THIN	炎の無次元温度 (=1.0)
S	() 式	THAIR	気温の無次元温度 (=0.0)
R	() 式他	LIN	自由端における l_0
TH	温度	LINPUT	炎における l_0
NMAX	ポアソンの反復回数の上限	WW	流れ関数
KMAX	時点の上限	ORM	$K=1$ の時、原MAC法を用い、そのために係数の値が変化する。
KORD	$K=KORD$ の時、流線図を描かせる。		
KSTEP	$K=KSTEP$ の時まで、渦動粘性係数一定	ORN, ORL	乱流計算の1回目には原MAC法を用いるため、係数をおきかえる。

4-3. フローチャートの説明.

プログラムのフローチャートとしては、リストをそのままフローチャートにしたものに、その意味、説明を付け加えたものと、これが非常に長いので、その全体の構成が理解しにくいので、それをつかむために、要旨のみをまとめた縮小版との2種類を付した。縮小版においては、入力を緑、出力を赤、時間ステップを進める箇所を青で記したので、そこからへんも参考にしてください。

全体の流れは2つの大きなループがあり、1つは時間ステップを進めるループであり、もう1つは、 $P(i,j)$ を加速緩和法によって求める時の反復計算のループである。時間ステップ K が $KSTEP$ までは、渦動粘性係数一定の計算をさせ $K=KSTEP+1$ からは乱流計算に入る。 $K=1$, $K=KSTEP+1$ の計算には、原MAC法を用い、その他は2次精度MAC法を用いている。出力に関しては、 K が $KORD$ の倍数の時、各セルでの U, V, TH, P, D, Q, E を出力させ、 WM を計算し流線図を描かせるようになっている。これらの収束状況がわかるように、各時間ステップで K, N, DP と特定の U, V を出力させた。なお計算時間がかかりかため出てきた結果をファイルに記憶させ、さらにそれを読み込ませて連続的に計算するようになっている。

プログラムに関する大まかな説明は以上であり、細かい点は、リストと2つのフローチャートを参照していただきたい。

第5節 中心差分と風上差分

第4章2節で示した中心差分による差分近似では、乱流エネルギー Q 、エネルギー逸散率 E 、温度 T に負の値が出て、ポアソン方程式が収束しなくなる状態が生じる。

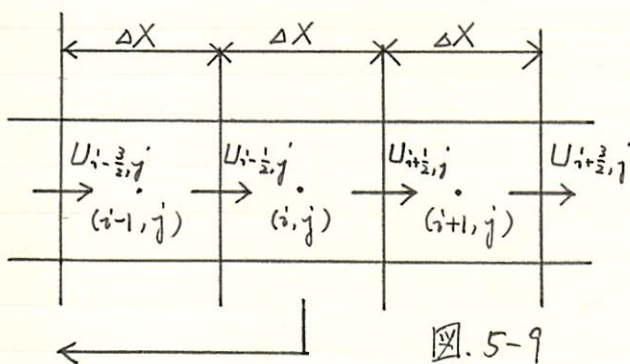
そこで計算を安定に行なわせるため、以下の項に風上差分近似を使用した。

$$(2-4-31') \text{ 式中の } \frac{\partial(QU)}{\partial X}, \frac{\partial(QV)}{\partial Y}$$

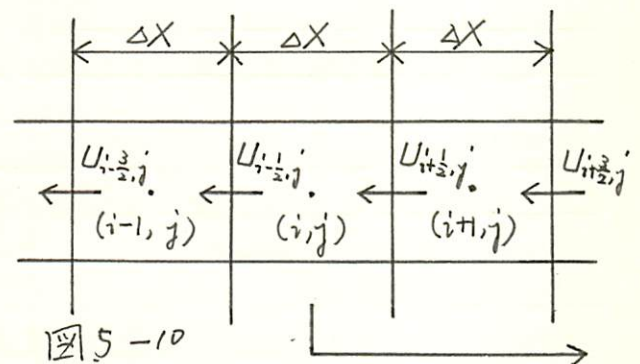
$$(2-4-33) \text{ 式中の } \frac{\partial(EU)}{\partial X}, \frac{\partial(EV)}{\partial Y}$$

$$(2-4-30'') \text{ 式中の } \frac{\partial(U\theta)}{\partial X}, \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y}$$

中心差分と風上差分の違いを、今 $\partial(QU)/\partial X$ を例として説明する。差分中心は (i, j)



(i) $U \geq 0$ の場合



(ii) $U < 0$ の場合

中心差分では、

$$\frac{\partial(QU)}{\partial X} = \left(\frac{Q_{i+1, j} + Q_{i, j}}{2} \cdot U_{i+1/2, j} - \frac{Q_{i, j} + Q_{i-1, j}}{2} \cdot U_{i-1/2, j} \right) / \Delta X \quad (5-5-1)$$

風上差分では、常に風上側の片側差分のみを使う。

i) $U \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial(QU)}{\partial X} &= \frac{(QU)_{i+\frac{1}{2},j} - (QU)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \\ &= \frac{Q_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j} - Q_{i-\frac{1}{2},j} U_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \\ &= \frac{\left(\frac{3Q_{ij} - Q_{i-1,j}}{2}\right) U_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{Q_{ij} + Q_{i-1,j}}{2}\right) U_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \quad (5-5-2) \end{aligned}$$

ii) $U < 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial(QU)}{\partial X} &= \frac{(QU)_{i+\frac{1}{2},j} - (QU)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \\ &= \frac{Q_{i+\frac{1}{2},j} U_{i+\frac{1}{2},j} - Q_{i-\frac{1}{2},j} U_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \\ &= \frac{\left(\frac{Q_{i+1,j} + Q_{ij}}{2}\right) U_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{3Q_{ij} - Q_{i+1,j}}{2}\right) U_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \quad (5-5-3) \end{aligned}$$

プログラムでは、 U が正負の場合をまとめて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(QU)}{\partial X} &= \frac{1}{\Delta X} \left\{ \left(\frac{3Q_{ij} - Q_{i-1,j}}{2} \cdot \frac{|U_{i+\frac{1}{2},j}| + U_{i+\frac{1}{2},j}}{2} + \frac{Q_{i+1,j} + Q_{ij}}{2} \cdot \frac{U_{i+\frac{1}{2},j} - |U_{i+\frac{1}{2},j}|}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{Q_{i+1,j} + Q_{ij}}{2} \cdot \frac{|U_{i-\frac{1}{2},j}| + U_{i-\frac{1}{2},j}}{2} + \frac{3Q_{ij} - Q_{i+1,j}}{2} \cdot \frac{U_{i-\frac{1}{2},j} - |U_{i-\frac{1}{2},j}|}{2} \right) \right\} \quad (5-5-4) \end{aligned}$$

とした。 $\partial(QU)/\partial X$ 以外の前頁に示した項も同様にした。

☆ 風上差分を用いた差分近似式

風上差分を用いたため、第4章2節の差分式のうちで、
変化したもののみを取り上げて、まとめておく。

(2-4-30)式の差分近似式(4-2-9)は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^n = & \frac{\left(\frac{V_{\theta ij}^n + V_{\theta i+1,j}^n}{2}\right) \left(\frac{H_{i+1,j}^n - H_{ij}^n}{\Delta X}\right) - \left(\frac{V_{\theta ij}^n + V_{\theta i-1,j}^n}{2}\right) \left(\frac{H_{ij}^n - H_{i-1,j}^n}{\Delta X}\right)}{\Delta X} \\
 & + \frac{\left(\frac{V_{\theta ij+1}^n + V_{\theta ij}^n}{2}\right) \left(\frac{H_{ij+1}^n - H_{ij}^n}{\Delta Y}\right) - \left(\frac{V_{\theta ij}^n + V_{\theta ij-1}^n}{2}\right) \left(\frac{H_{ij}^n - H_{ij-1}^n}{\Delta Y}\right)}{\Delta Y} \\
 & - \left\{ \left(\frac{3H_{ij}^n - H_{i-1,j}^n}{2}\right) \left(\frac{|U_{i+\frac{1}{2},j}^n| + U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2}\right) + \left(\frac{H_{i+1,j}^n + H_{ij}^n}{2}\right) \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^n - |U_{i+\frac{1}{2},j}^n|}{2}\right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{H_{i-1,j}^n + H_{ij}^n}{2}\right) \left(\frac{|U_{i-\frac{1}{2},j}^n| + U_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2}\right) - \left(\frac{3H_{ij}^n - H_{i+1,j}^n}{2}\right) \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j}^n - |U_{i-\frac{1}{2},j}^n|}{2}\right) \right\} / \Delta X \\
 & - \left\{ \left(\frac{3H_{ij}^n - H_{i,j-1}^n}{2}\right) \left(\frac{|V_{i,j+\frac{1}{2}}^n| + V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{2}\right) + \left(\frac{H_{i,j+1}^n + H_{ij}^n}{2}\right) \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - |V_{i,j+\frac{1}{2}}^n|}{2}\right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{H_{i,j-1}^n + H_{ij}^n}{2}\right) \left(\frac{|V_{i,j-\frac{1}{2}}^n| + V_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2}\right) - \left(\frac{3H_{ij}^n - H_{i,j+1}^n}{2}\right) \left(\frac{V_{i,j-\frac{1}{2}}^n - |V_{i,j-\frac{1}{2}}^n|}{2}\right) \right\} / \Delta Y
 \end{aligned}$$

(5-5-5)

(4-2-9)の代わりに2、(5-5-5)を用いればよい。

(2-4-31) 式の差分近似式 (4-2-11) は以下のように変わる。

$$\begin{aligned}
 f_{ij}^m = & \frac{\left(\frac{V_{i+1,j}^m + V_{i,j}^m}{2}\right)\left(\frac{Q_{i+1,j}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta X}\right) - \left(\frac{V_{i,j}^m + V_{i-1,j}^m}{2}\right)\left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i-1,j}^m}{\Delta X}\right)}{\Delta X} \\
 & + \frac{\left(\frac{V_{i,j+1}^m + V_{i,j}^m}{2}\right)\left(\frac{Q_{i,j+1}^m - Q_{i,j}^m}{\Delta Y}\right) - \left(\frac{V_{i,j}^m + V_{i,j-1}^m}{2}\right)\left(\frac{Q_{i,j}^m - Q_{i,j-1}^m}{\Delta Y}\right)}{\Delta Y} \\
 & + V_{i,j}^m \cdot S_{ij}^m - E_{ij}^m - Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{(\theta_{i+1,j}^m - \theta_{i-1,j}^m)}{2\Delta X} \sin\alpha + Ar \frac{V_{i,j}^m}{\sigma_\theta} \frac{(\theta_{i,j+1}^m - \theta_{i,j-1}^m)}{2\Delta Y} \cos\alpha \\
 & + \left\{ \left(\frac{3Q_{i,j}^m - Q_{i-1,j}^m}{2}\right) \left(\frac{|U_{i+\frac{1}{2},j}^m| + U_{i+\frac{1}{2},j}^m}{2}\right) + \left(\frac{Q_{i+1,j}^m + Q_{i,j}^m}{2}\right) \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - |U_{i+\frac{1}{2},j}^m|}{2}\right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{Q_{i-1,j}^m + Q_{i,j}^m}{2}\right) \left(\frac{|U_{i-\frac{1}{2},j}^m| + U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{2}\right) - \left(\frac{3Q_{i,j}^m - Q_{i+1,j}^m}{2}\right) \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j}^m - |U_{i-\frac{1}{2},j}^m|}{2}\right) \right\} / \Delta X \\
 & + \left\{ \left(\frac{3Q_{i,j}^m - Q_{i,j-1}^m}{2}\right) \left(\frac{|V_{i,j+\frac{1}{2}}^m| + V_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{2}\right) + \left(\frac{Q_{i+1,j}^m + Q_{i,j}^m}{2}\right) \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^m - |V_{i,j+\frac{1}{2}}^m|}{2}\right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{Q_{i,j-1}^m + Q_{i,j}^m}{2}\right) \left(\frac{|V_{i,j-\frac{1}{2}}^m| + V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{2}\right) - \left(\frac{3Q_{i,j}^m - Q_{i,j+1}^m}{2}\right) \left(\frac{V_{i,j-\frac{1}{2}}^m - |V_{i,j-\frac{1}{2}}^m|}{2}\right) \right\} / \Delta Y \\
 & \dots(5-5-6)
 \end{aligned}$$

(4-2-11) の代わりに (5-5-6) を用いる。

(2-4-33) 式の差分近似式 (4-2-14) は、以下のように変わる。

$$\begin{aligned}
 g^m = & \frac{\left(\frac{V_{\varepsilon_{i+1,j}}^m + V_{\varepsilon_{ij}}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{E_{i+1,j}^m - E_{ij}^m}{\Delta X}\right) - \left(\frac{V_{\varepsilon_{ij}}^m + V_{\varepsilon_{i-1,j}}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{E_{ij}^m - E_{i-1,j}^m}{\Delta X}\right)}{\Delta X} \\
 & + \frac{\left(\frac{V_{\varepsilon_{i,j+1}}^m + V_{\varepsilon_{ij}}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{E_{i,j+1}^m - E_{ij}^m}{\Delta Y}\right) - \left(\frac{V_{\varepsilon_{ij}}^m + V_{\varepsilon_{i,j-1}}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{E_{ij}^m - E_{i,j-1}^m}{\Delta Y}\right)}{\Delta Y} \\
 & + C_1 V_{\varepsilon_{ij}}^m S_{ij}^m \frac{E_{ij}^m}{Q_{ij}^m} - C_2 \frac{Q_{ij}^m E_{ij}^m}{V_{\varepsilon_{ij}}^m} \\
 & + \left\{ \left(\frac{3E_{ij}^m - E_{i-1,j}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{|U_{i+\frac{1}{2},j}^m| + U_{i+\frac{1}{2},j}^m}{2}\right) + \left(\frac{E_{i+1,j}^m + E_{ij}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^m - |U_{i+\frac{1}{2},j}^m|}{2}\right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{E_{i-1,j}^m + E_{ij}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{|U_{i-\frac{1}{2},j}^m| + U_{i-\frac{1}{2},j}^m}{2}\right) - \left(\frac{3E_{ij}^m - E_{i+1,j}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{U_{i-\frac{1}{2},j}^m - |U_{i-\frac{1}{2},j}^m|}{2}\right) \right\} / \Delta X \\
 & + \left\{ \left(\frac{3E_{ij}^m - E_{i,j-1}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{|V_{i,j+\frac{1}{2}}^m| + V_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{2}\right) + \left(\frac{E_{i,j+1}^m + E_{ij}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^m - |V_{i,j+\frac{1}{2}}^m|}{2}\right) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{E_{i,j-1}^m + E_{ij}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{|V_{i,j-\frac{1}{2}}^m| + V_{i,j-\frac{1}{2}}^m}{2}\right) - \left(\frac{3E_{ij}^m - E_{i,j+1}^m}{2}\right) \cdot \left(\frac{V_{i,j-\frac{1}{2}}^m - |V_{i,j-\frac{1}{2}}^m|}{2}\right) \right\} / \Delta Y \\
 & \dots (5-5-7)
 \end{aligned}$$

(4-2-14) の代わりに (5-5-7) を用いる。

第VI章. 実験結果及び考察.

第1節. 流線図.

1-1. 数値実験結果

第Ⅴ章で示した条件を用い、一部に風上差分近似を用いて行った数値実験による流線図を次頁以下に掲載する。

数値計算は時間を徐々に進めて行うので時間変化を追うことができる。比較のため水平路のもの、(図6-1)

のように斜めにしたものとを並べて載せてある。左側が辻本総氏¹⁾

と同じ、水平路における $K=3500, 4500, 5500, 6500, 7500, 8500, 9500, 10500,$

$11000, 12000, 13000, 14000, 15000,$

$16000, 17000, 18000, 19000, 20000$ の

流線図であり、右側が私の行った 45° 傾けた場合(図6-1)における流線図である(比較のため水平にして並べてある。)

残念ながらこの場合には $K=13000$ までである。というのはこの斜路における場合には、 $K=13016$ において Poisson の方程式が発散してしまい定常解が得られなかつたからである。

しかし、ここまでを見ると、渦がしだいに大きくなっていき、その中心がしだいに開放された自由端から出ていく様子がわかる。

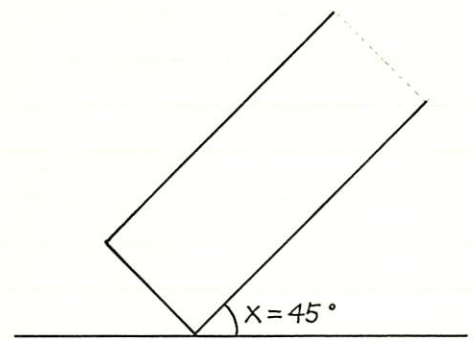
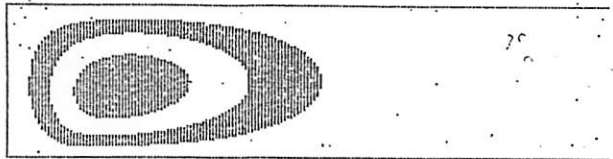
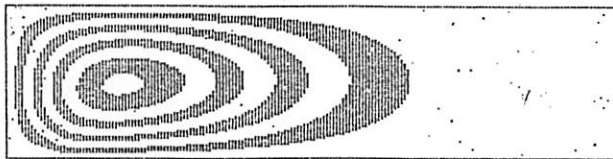


図 6-1

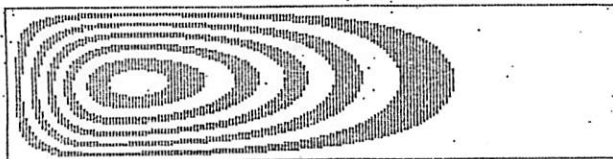
水平路の場合



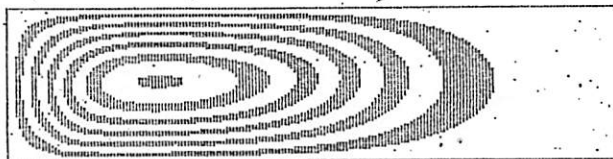
$K=3500$



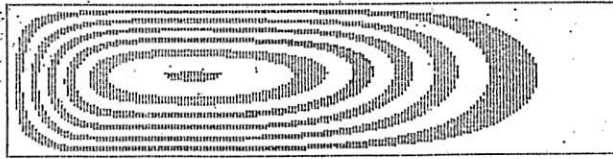
$K=4500$



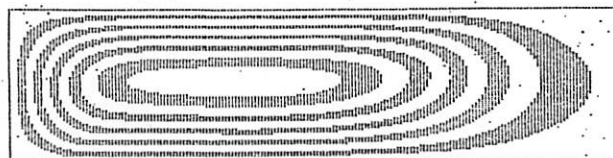
$K=5500$



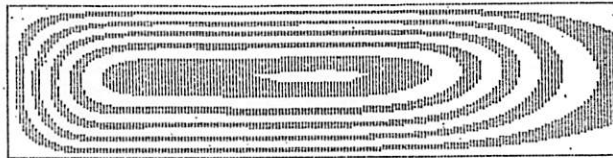
$K=6500$



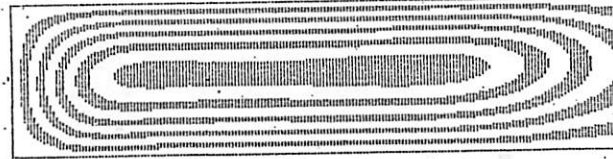
$K=7500$



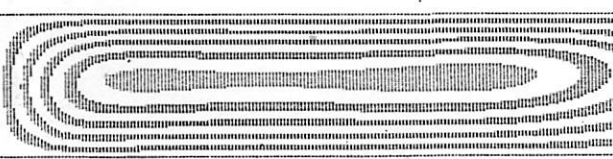
$K=8500$



$K=9500$

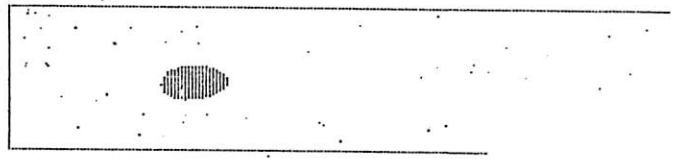


$K=10500$

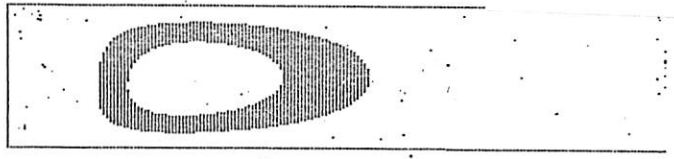


$K=11000$

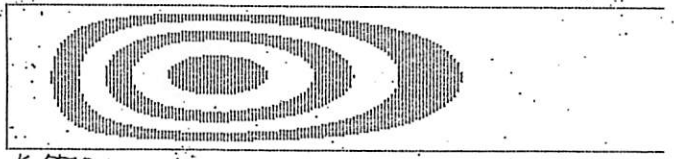
斜路の場合 (図6-1)



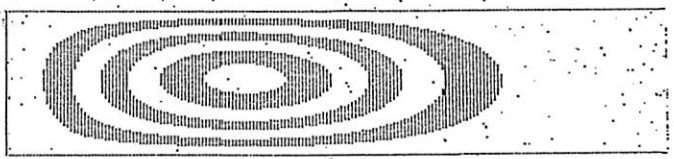
$K=3500$



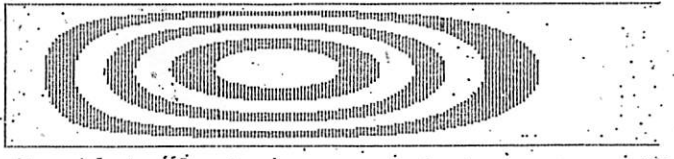
$K=4500$



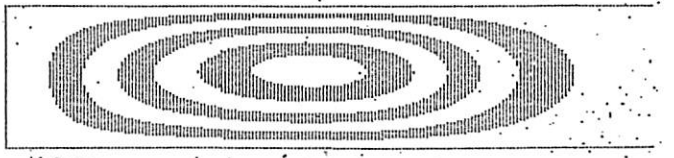
$K=5500$



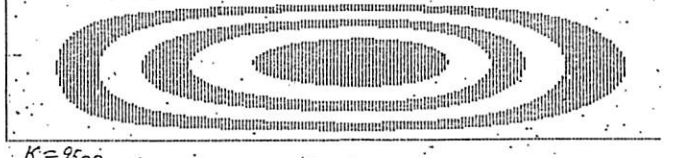
$K=6500$



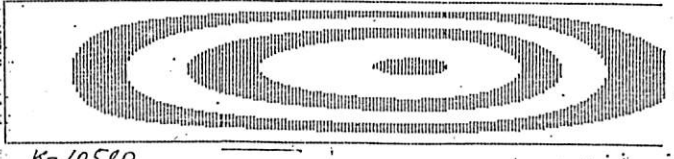
$K=7500$



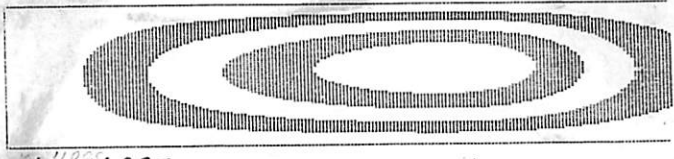
$K=8500$



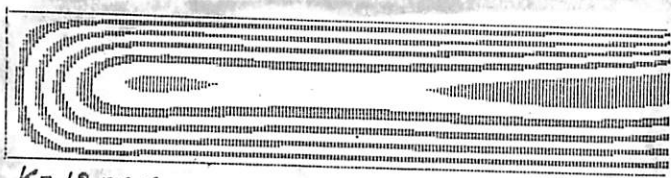
$K=9500$



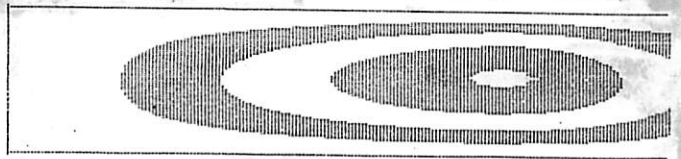
$K=10500$



$K=11000$



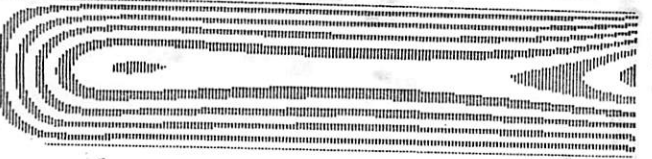
$K=12000$



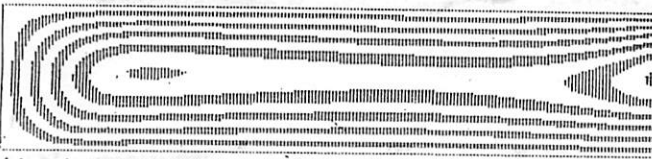
$K=12000$



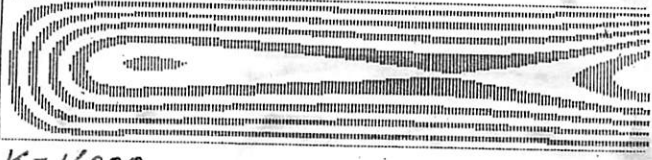
$K=13000$



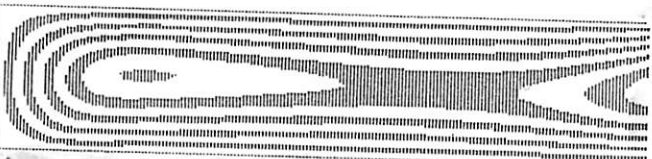
$K=15000$



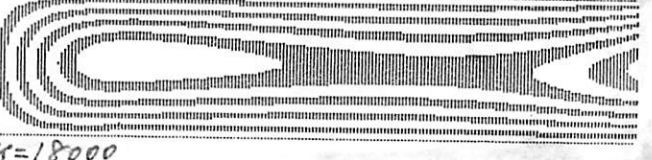
$K=16000$



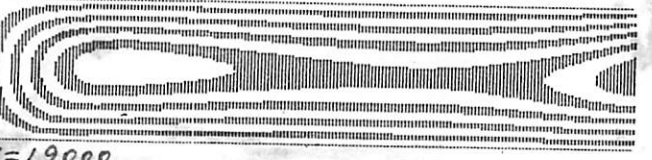
$K=17000$



$K=18000$



$K=19000$



$K=20000$

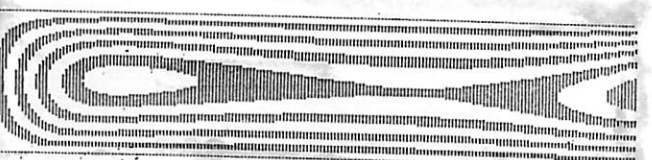


图 6-2, 水平路及U形斜路
における流線図.

1-2. 考察.

これらの流線図を見ていて、先ず気がつくことは、水平路の場合に比べて斜路の場合は、全体的に速度が遅くなっているということである。このことは、流れ関数と速度との関係を考えれば流線図の流線の密度が粗であることから明らかであろう。すなわち

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (6-1-1)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6-1-2)$$

である。

その他斜路の場合に特徴的なことは、最初に渦が表われる位置が、より開放端に近い側にあるということ。また、その渦の中心が、しだいに向かって左から右に、固定端側から自由端側へ移っているということである。これはやはり、浮力がX方向にも働くことによるものであると考えられる。

第2節、数値実験結果の有次元化

数値実験は、長さ、速度、温度差等の代表値 L_0 , V_0 , ΔT_0 等で無次元化して行なった。辻本氏の論文(1)にも詳しく述べられているので詳述は避けるが、これらの無次元化された方程式を用いる方法には、次のようなメリットがある。それは、1回の数値実験を行うことによつてすべての火源温度に対する温度、風速の分布等を網羅できるといふ点である。

さてここで、無次元で得られた数値実験結果を有次元になおす際に、比較の意味もあり、火源温度 (THIN) の設定値として、① 600 K^{**} ② 900 K ③ 1200 K の3つの場合を考える。

例えば、 $THIN = 500(K)$ と設定した①の場合には、

$$THIN = 600 (K)$$

$$THAIR = 290 (K)$$

$$L_0 = 220 (cm)$$

$$V_0 = \sqrt{g \cdot \frac{1}{THIN} \cdot (THIN - THAIR) \cdot L_0}$$

$$= \sqrt{980 \cdot \frac{600 - 290}{600} \cdot 220}$$

$$= 333.7564 (cm/s)$$

$$\Delta\theta_0 = THIN - THAIR$$

$$= 600 - 290$$

$$= 310 (deg)$$

よって、無次元風速 0.132, 無次元温度 0.399 と与えられた場合、有次元かするには、次のようにすればよい。

$$\frac{V}{V_0} = 0.132$$

$$\theta = \frac{\theta - THAIR}{\Delta\theta_0} = \frac{\theta - 290}{310} = 0.399$$

を解いて

$$V = 44.1 (cm/s)$$

$$\theta = 413.7 (K) \rightarrow 140.7 (^\circ C)$$

となる。同様に②,③も行う。次頁に表にして、①,②

③の場合の $L_0, V_0, \Delta\theta_0$ を示す。

表6-1.有次元化する際の基準値

	①	②	③
火源温度(T _{HN})(K)	600	900	1200
新鮮空気温度(T _{AIR})(K)	290	290	290
代表長さ L ₀ (cm)	220	220	220
代表速度 V ₀ (cm/s)	337	382	407
代表温度差 ΔT ₀ (deg)	310	610	910

2-1.以上の①,②,③の L₀, V₀, ΔT₀ の値を用いて有次元化した結果を次頁以降に示す。(K=10500の場合,ほんとうは定常解同士を比較したいのであるが,斜路のほうが, K=13016において発散してしまっただのでこの時点で比較することにした。(表2れを書いた時,また"K=13000のDATAをた"てていなかった。))

表 6-2-a 数値実験 より得られた A, B, C, D 各点の風速分布表 (U)

床面からの距離	215	205	195	185	175	165	155	145	135	125	115
A	無次元風速	-0.0753	-0.0736	-0.0705	-0.0659	-0.0533	-0.0456	-0.0370	-0.0277	-0.0179	-0.00768
	①	-25.1	-24.6	-23.5	-22.0	-17.8	-15.2	-12.3	-9.25	-5.97	-2.56
	②	-28.8	-28.1	-26.9	-25.2	-20.4	-17.4	-14.1	-10.6	-6.84	-2.94
	③	-30.4	-29.8	-28.5	-26.6	-24.3	-21.6	-18.4	-15.0	-11.2	-7.24
B	無次元風速	-0.122	-0.120	-0.116	-0.110	-0.103	-0.0934	-0.0824	-0.0558	-0.0403	-0.0235
	①	-40.7	-40.1	-38.7	-36.7	-34.4	-31.2	-27.5	-18.6	-13.5	-7.84
	②	-46.6	-45.9	-44.3	-42.0	-39.4	-35.7	-31.5	-26.7	-15.4	-8.98
	③	-49.3	-48.5	-46.9	-44.5	-41.6	-37.8	-33.3	-28.2	-16.3	-9.50
C	無次元風速	-0.140	-0.138	-0.134	-0.128	-0.120	-0.111	-0.0993	-0.0703	-0.0530	-0.0338
	①	-46.7	-46.1	-44.7	-42.7	-40.1	-37.0	-33.1	-23.5	-17.7	-11.3
	②	-53.5	-52.8	-52.2	-48.9	-45.9	-42.4	-38.0	-32.8	-20.3	-12.9
	③	-56.6	-55.8	-54.2	-51.8	-48.5	-44.9	-40.2	-34.7	-28.4	-13.7
D	無次元風速	-0.0951	-0.0937	-0.0909	-0.0867	-0.0811	-0.0741	-0.0657	-0.0446	-0.0321	-0.0184
	①	-31.7	-31.3	-30.3	-28.9	-27.1	-24.7	-21.9	-14.9	-10.7	-6.14
	②	-36.4	-35.8	-34.7	-33.1	-31.0	-28.3	-25.1	-17.0	-12.3	-7.03
	③	-38.5	-37.9	-36.8	-35.1	-32.8	-30.0	-26.6	-18.0	-13.0	-7.44

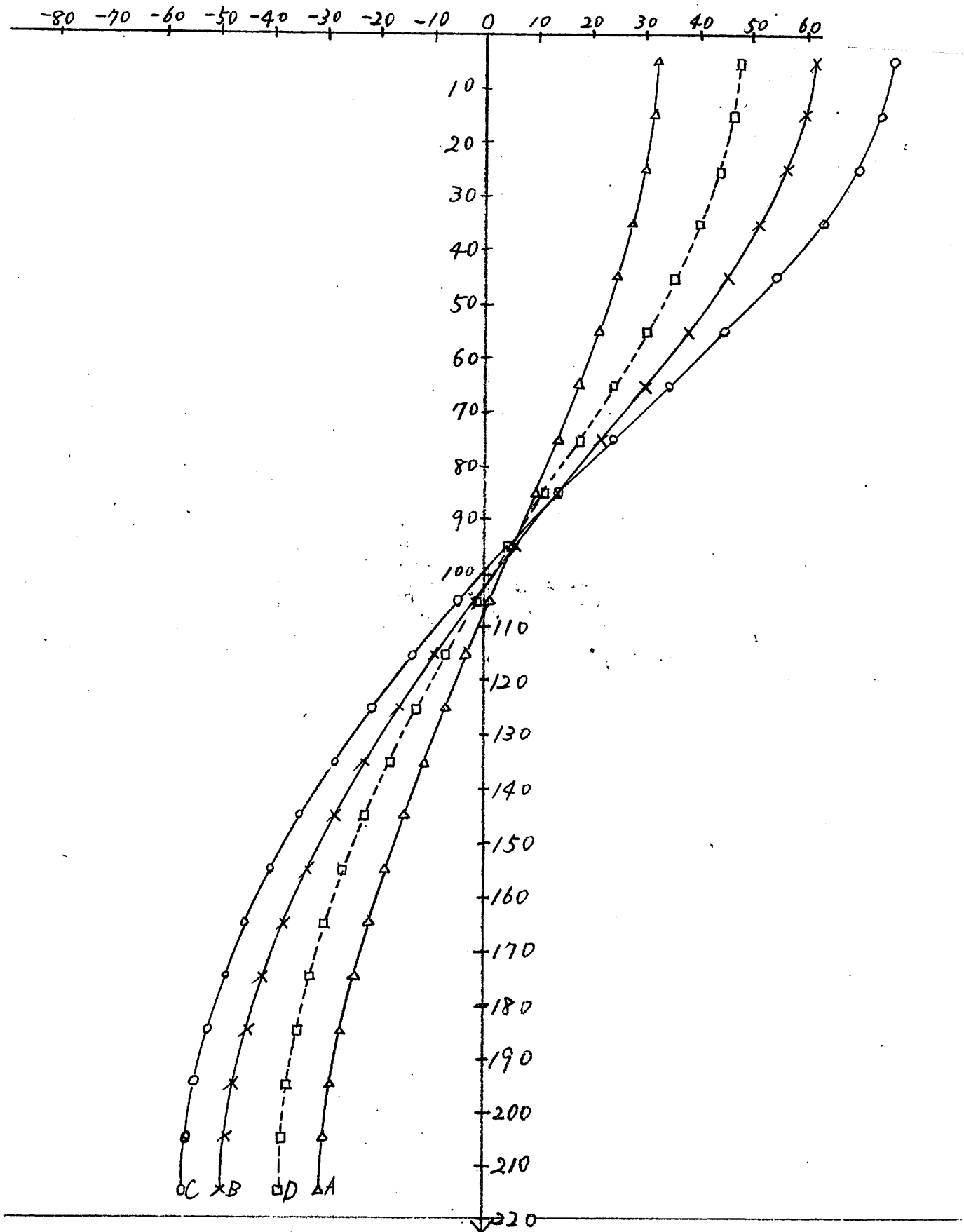
。単位 長さ (cm), 風速 (cm/sec)

。有次元化する際の火源温度 [THIN] ① 600 (K) ② 900 (K) ③ 1200 (K)

表6-2-b 数値実験 より得られたA,B,C,D各点の風速分布表(U)

天井面よりの距離		105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	
A	無次元風速	0.00284	0.0135	0.0241	0.0344	0.0443	0.0534	0.0616	0.0686	0.0741	0.0780	0.0800	
	有次元風速	①	0.948	4.51	8.04	11.5	14.8	17.8	20.6	22.9	24.7	26.0	26.7
		②	1.09	5.16	9.21	13.2	16.9	20.4	23.5	26.2	28.3	29.8	30.6
		③	1.15	5.46	9.44	13.9	17.9	21.6	24.9	27.7	30.0	31.5	32.3
B	無次元風速	-0.00547	0.0135	0.0333	0.0535	0.0735	0.0929	0.111	0.126	0.139	0.147	0.152	
	有次元風速	①	-1.83	4.51	11.1	17.9	24.5	31.0	37.0	42.1	46.4	49.1	50.7
		②	-2.09	5.16	12.7	20.5	28.1	35.5	42.4	48.2	53.1	56.2	58.1
		③	-2.21	5.46	13.5	21.6	29.7	37.6	44.9	50.9	56.2	59.4	61.5
C	無次元風速	-0.0129	0.00960	0.0336	0.0587	0.0844	0.110	0.134	0.155	0.171	0.182	0.188	
	有次元風速	①	-4.31	3.20	11.2	19.6	28.2	36.7	44.7	51.7	57.1	60.7	62.7
		②	-4.93	3.67	12.8	22.4	32.3	42.0	51.2	59.3	65.4	69.6	71.9
		③	-5.22	3.88	13.6	23.7	34.1	44.5	54.2	62.7	69.1	73.6	76.0
D	無次元風速	-0.00361	0.0119	0.0278	0.0437	0.0593	0.0740	0.0874	0.0989	0.108	0.114	0.117	
	有次元風速	①	-1.20	3.97	9.28	14.6	19.8	24.7	29.2	33.0	36.0	38.0	39.0
		②	-1.38	4.55	10.6	16.7	22.7	28.3	33.4	37.8	41.3	43.6	44.7
		③	-1.46	4.81	11.2	17.7	24.0	30.0	35.3	40.0	43.7	46.1	47.3

③ 火源温度 1200 (K) の時の風速分布 風速



天井面よりの距離

図 6-3c

② 火源温度 900 (K) の時の風速分布

風速 (cm/sec)

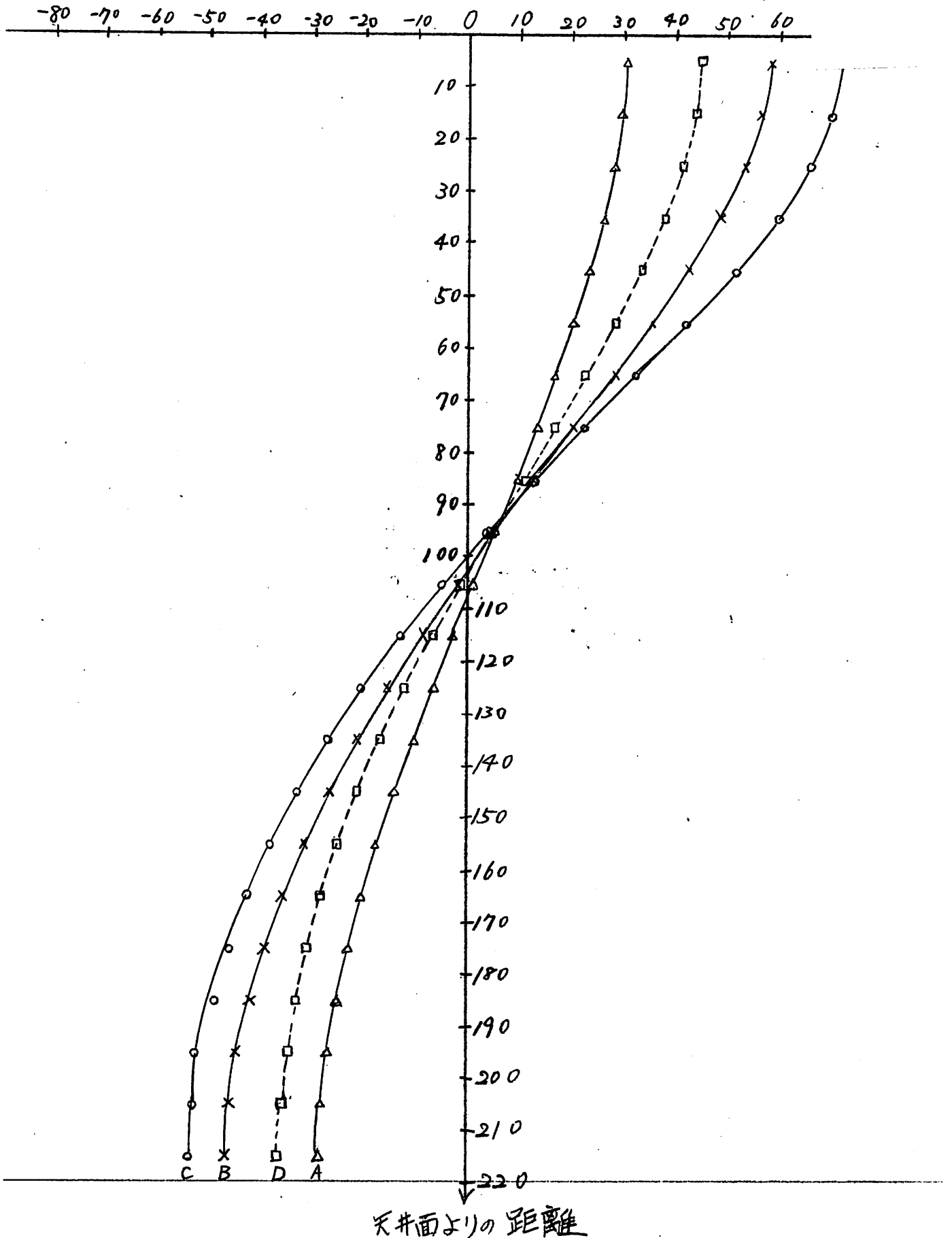


図 6-36

① 火源温度 600(K) の時の風速分布

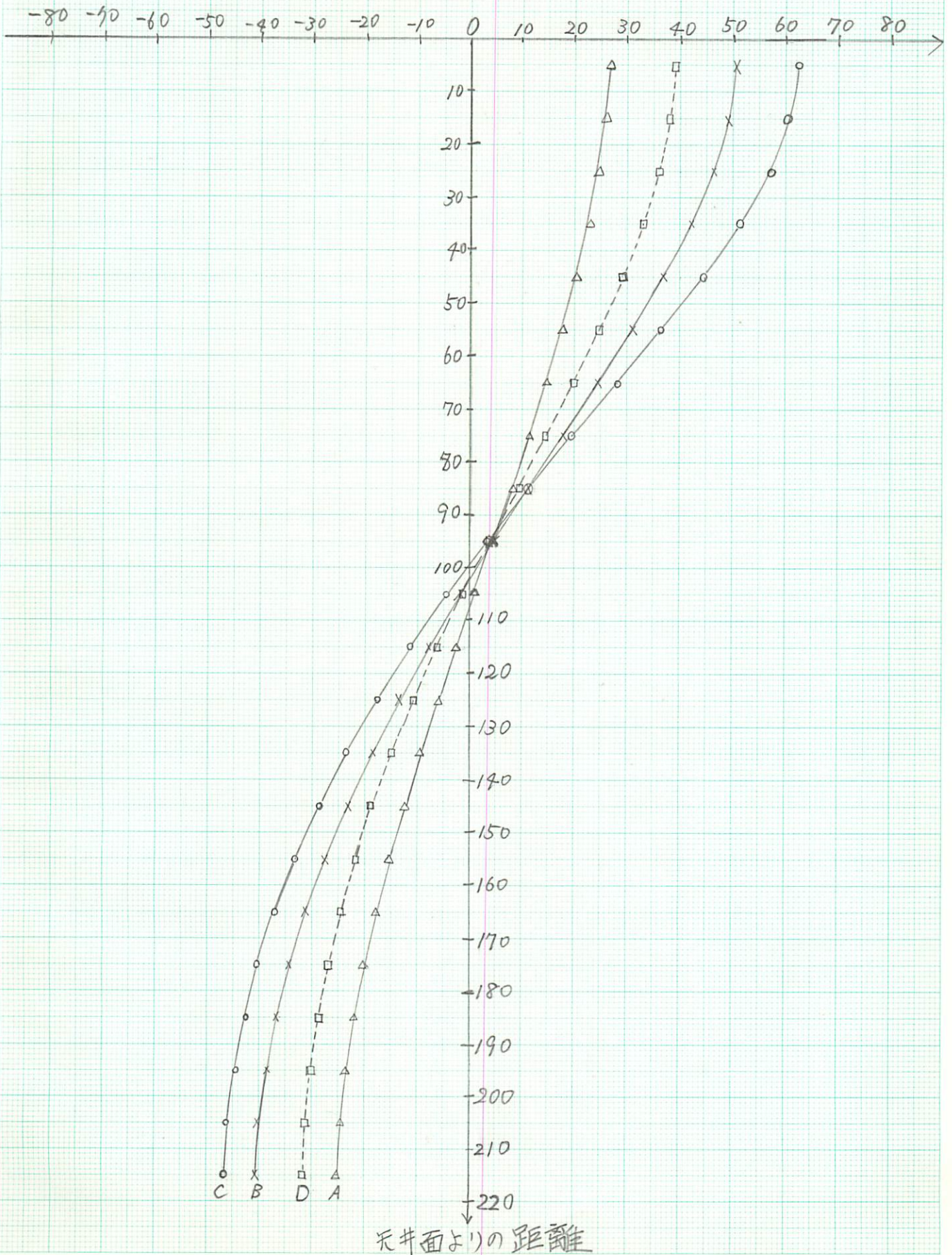
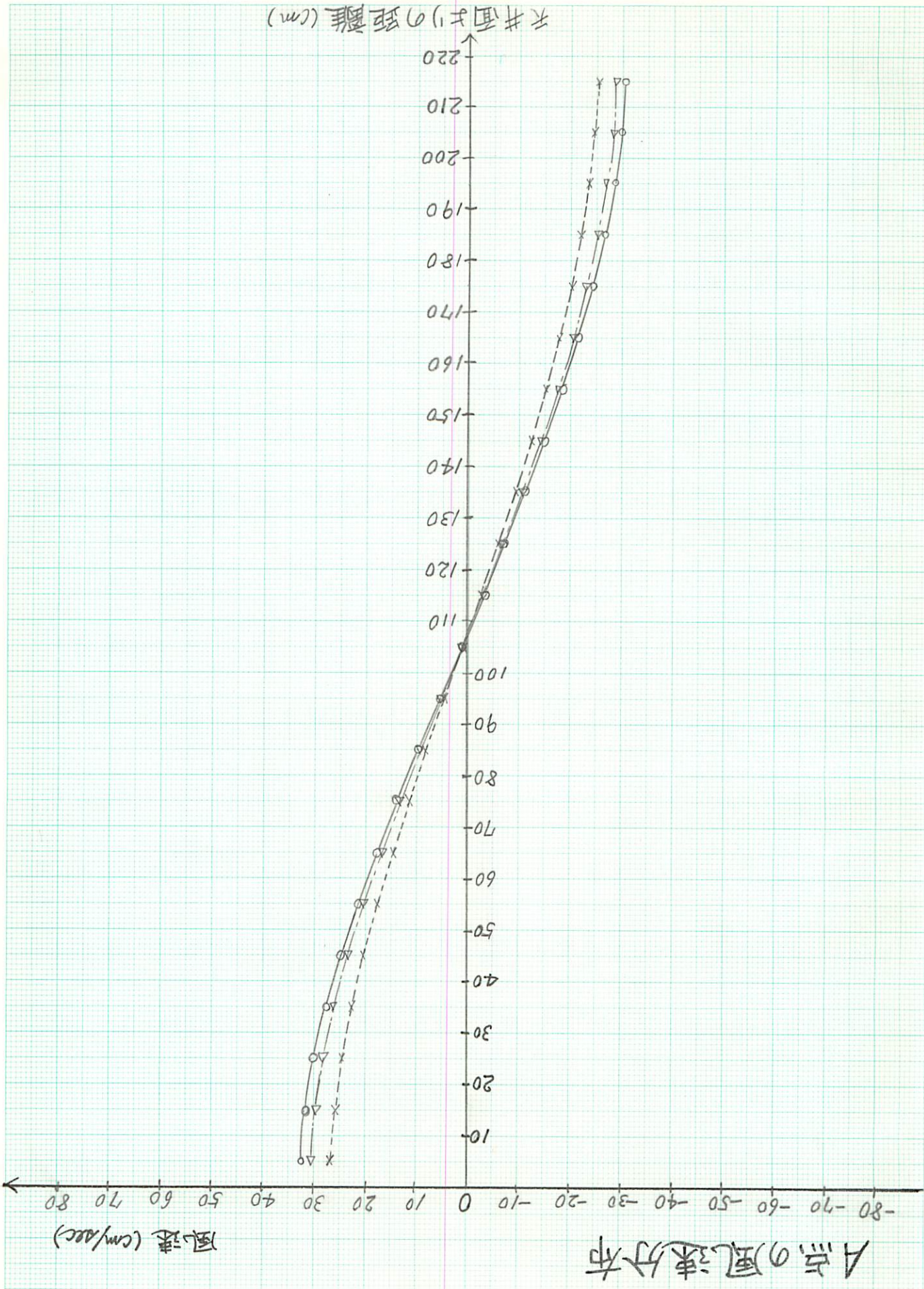


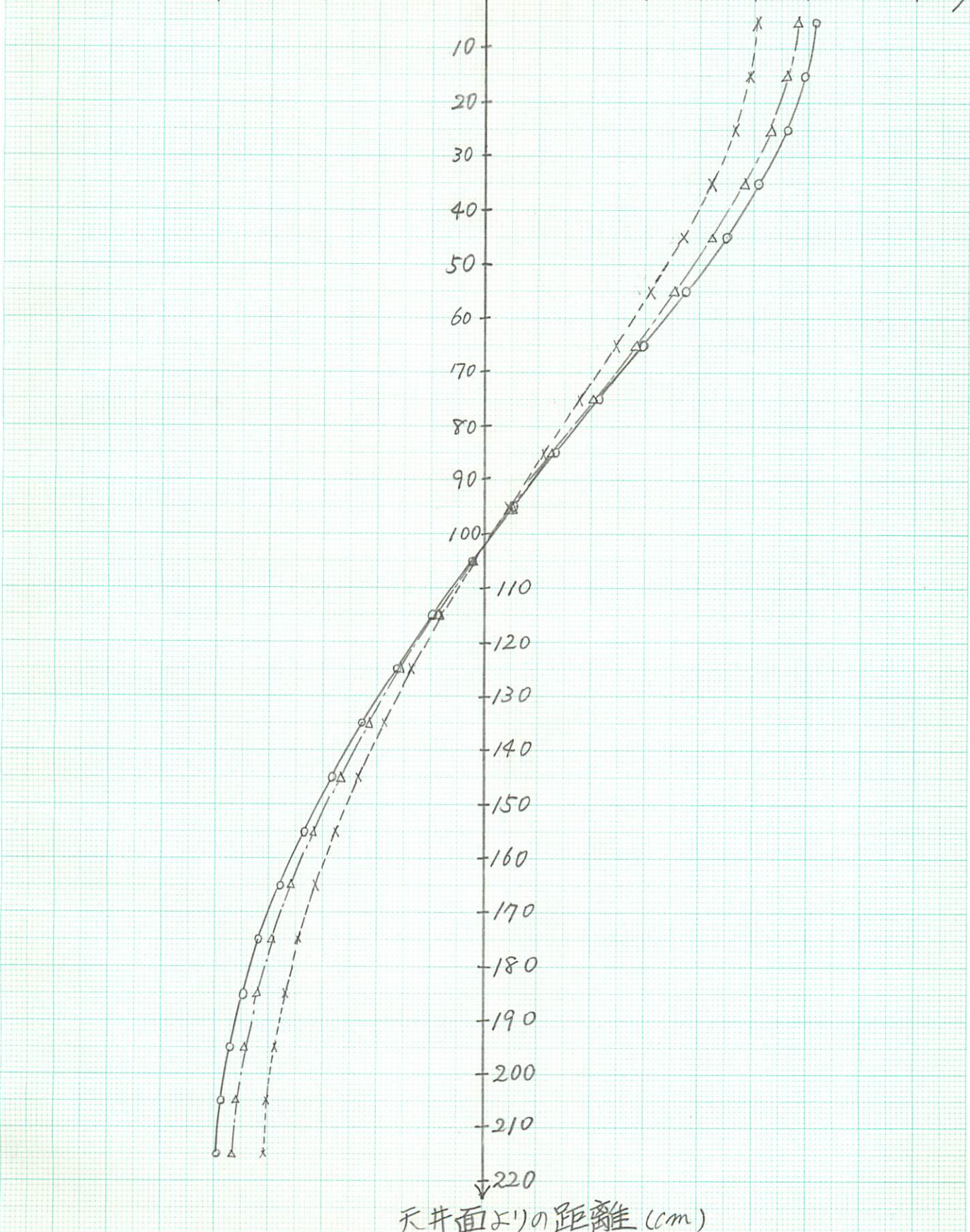
図. 6-4a



B点の風速分布

風速 (cm/sec)

-80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80



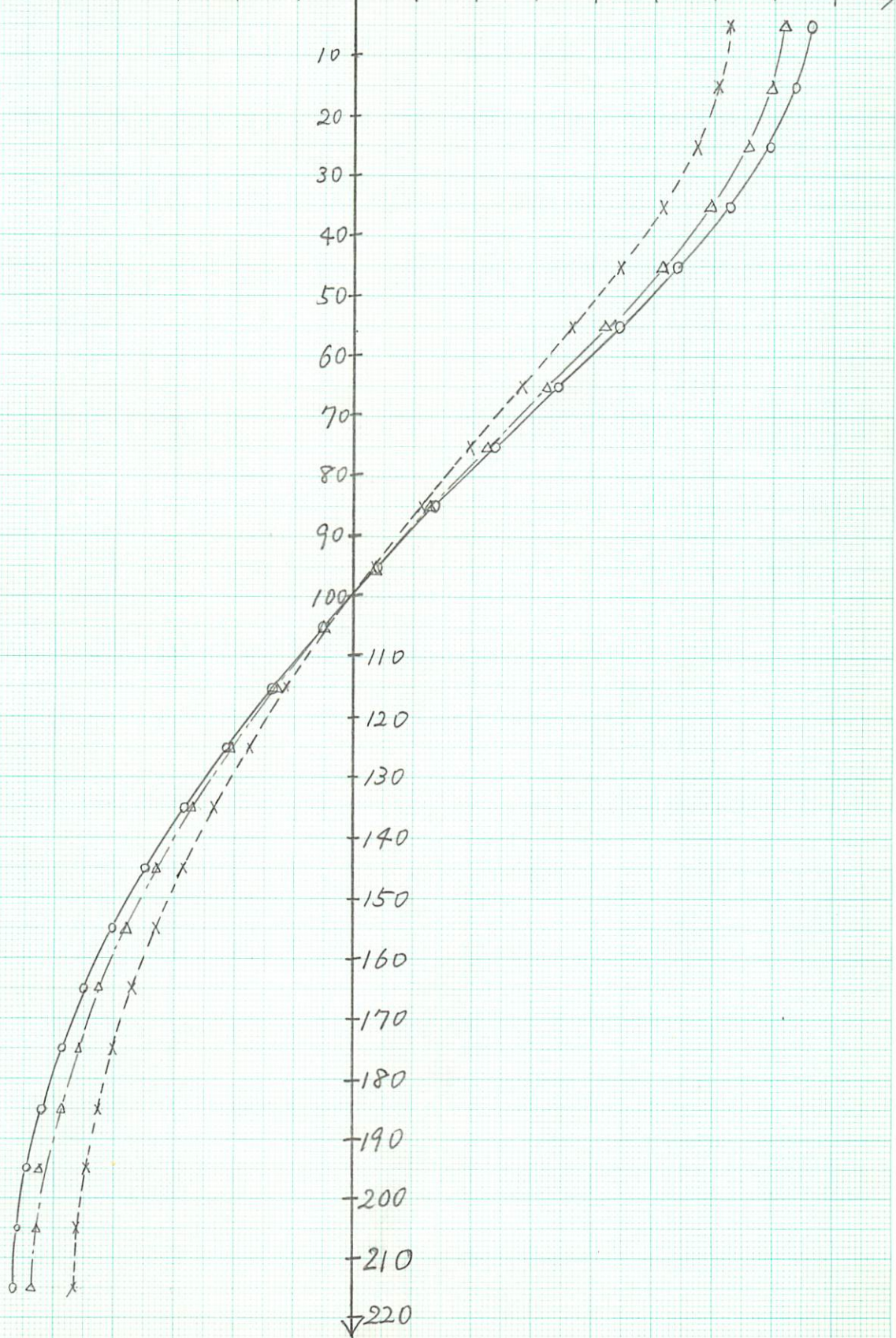
天井面よりの距離 (cm)

図.6-4b

C点の風速分布

風速 (cm/sec)

-80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80



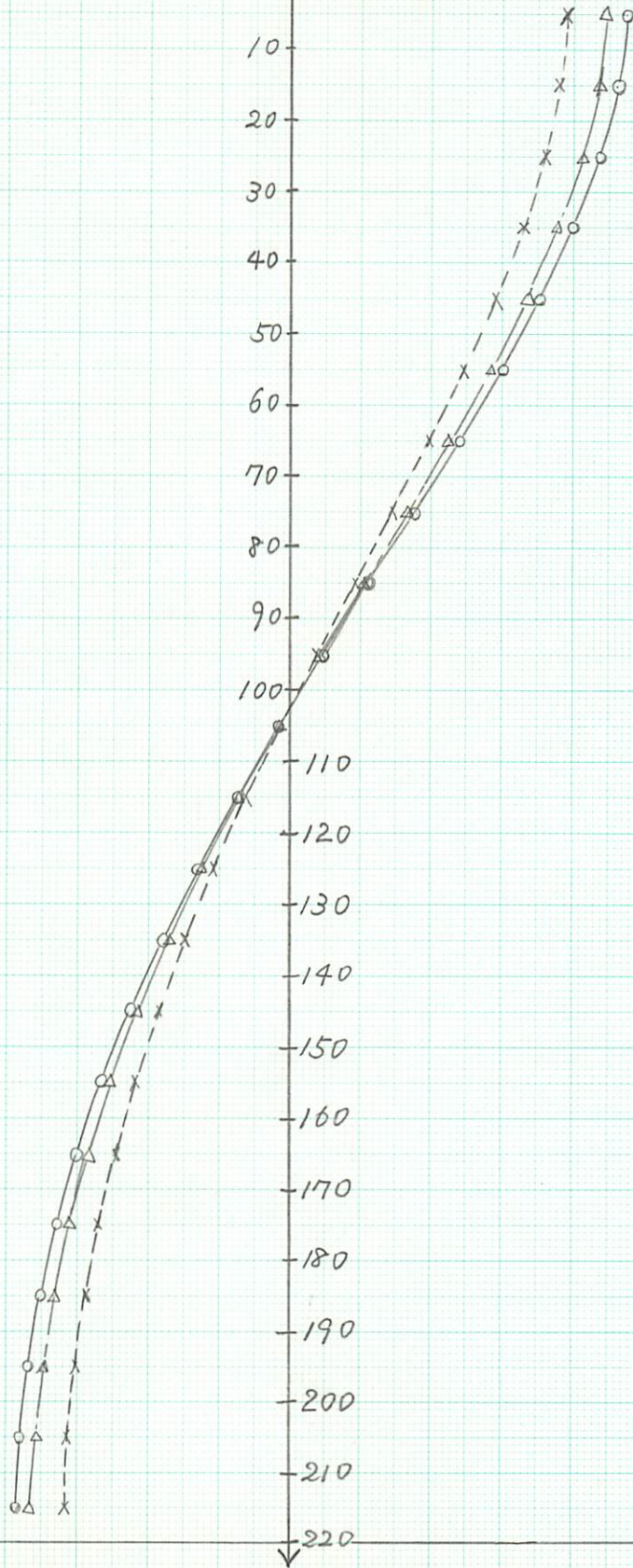
天井面よりの距離 (cm)

図. 6-4c.

D点の風速分布

風速 (cm/sec)

-80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80



水井面からの距離 (cm)

図. 6-4d

表 6-3a 数値実験 より得られた A, B, C, D 各点の温度分布表 (TH)

天井面よりの距離	215	205	195	185	175	165	155	145	135	125	115
無次元温度	0.416	0.416	0.416	0.415	0.415	0.415	0.415	0.415	0.415	0.416	0.416
①	146.0	146.0	146.0	145.7	145.7	145.7	145.7	145.7	145.7	146.0	146.0
②	270.8	270.8	270.8	270.2	270.2	270.2	270.2	270.2	270.2	270.8	270.8
③	395.6	395.6	395.6	394.7	394.7	394.7	394.7	394.7	394.7	395.6	395.6
無次元温度	0.190	0.190	0.191	0.193	0.195	0.197	0.200	0.203	0.207	0.211	0.216
①	75.9	75.9	76.2	76.8	77.5	78.1	79.0	79.9	81.2	82.4	84.0
②	133.0	133.0	133.5	134.7	136.0	137.2	139.0	140.8	143.3	145.7	148.8
③	189.9	189.9	190.8	192.6	194.5	196.3	199.0	201.7	205.4	209.0	213.6
無次元温度	0.0640	0.0644	0.0652	0.0665	0.0682	0.0704	0.0732	0.0764	0.0802	0.0846	0.0895
①	36.8	37.0	37.2	37.6	38.1	38.8	39.7	40.7	41.9	43.8	44.7
②	56.0	56.3	56.8	57.6	58.6	59.9	61.7	63.6	65.9	68.6	71.6
③	75.2	75.6	76.3	77.5	79.1	81.1	83.6	86.5	90.0	94.0	98.4
無次元温度	0.0102	0.0104	0.0108	0.0113	0.0122	0.0132	0.0146	0.0163	0.0183	0.0207	0.0234
①	20.2	20.2	20.3	20.5	20.8	21.1	21.5	22.1	22.7	23.4	24.3
②	23.2	23.3	23.6	23.9	24.4	25.1	25.9	26.9	28.2	29.6	31.3
③	26.3	26.5	26.8	27.3	28.1	29.0	30.3	31.8	33.7	35.8	38.3

。単位は、長さ (cm), 温度 (°C)

。有次元化する際の火源温度 [THIN] ① 600 (K) ② 900 (K) ③ 1200 (K)

表 6-36 数値実験 より得られたA, B, C, D各点の温度分布表 (TH)

天井面よりの距離		105	95	85	75	65	55	45	35	25	15	5	
A	無次元温度	0.416	0.417	0.418	0.418	0.419	0.420	0.421	0.421	0.422	0.422	0.422	
	有次元温度	①	146.0	146.3	146.6	146.6	146.9	147.2	147.5	147.5	147.8	147.8	147.8
		②	270.8	271.4	272.0	272.0	272.6	273.2	273.8	273.8	274.4	274.4	274.4
		③	395.6	396.5	397.4	397.4	398.3	399.2	400.1	400.1	401.0	401.0	401.0
B	無次元温度	0.221	0.227	0.232	0.238	0.244	0.250	0.256	0.261	0.264	0.267	0.268	
	有次元温度	①	85.5	87.4	88.9	90.8	92.6	94.5	96.4	97.9	98.8	99.8	100.1
		②	151.8	155.5	158.5	162.2	165.8	169.5	173.2	176.2	178.0	180.0	180.5
		③	218.1	223.6	228.1	233.6	239.0	244.5	250.0	254.5	257.2	260.0	260.9
C	無次元温度	0.0950	0.101	0.108	0.115	0.122	0.129	0.136	0.142	0.147	0.150	0.152	
	有次元温度	①	46.5	48.3	50.5	52.7	54.8	57.0	59.2	61.0	62.6	63.5	64.1
		②	75.0	78.6	82.9	87.2	91.4	95.7	100.0	103.6	106.7	108.5	109.7
		③	103.5	108.9	115.3	121.7	128.0	134.4	140.8	146.2	150.8	153.5	155.3
D	無次元温度	0.0264	0.0297	0.0333	0.0369	0.0405	0.0439	0.0470	0.0497	0.0518	0.0531	0.0538	
	有次元温度	①	25.2	26.2	27.3	28.3	29.6	30.6	31.6	32.4	33.1	33.5	33.7
		②	33.1	35.1	37.3	39.5	41.7	43.8	45.7	47.3	48.6	49.4	49.8
		③	41.0	44.0	47.3	50.6	53.9	56.9	59.8	62.2	64.1	65.3	66.0

① 火源温度 600 (K) のときの温度分布

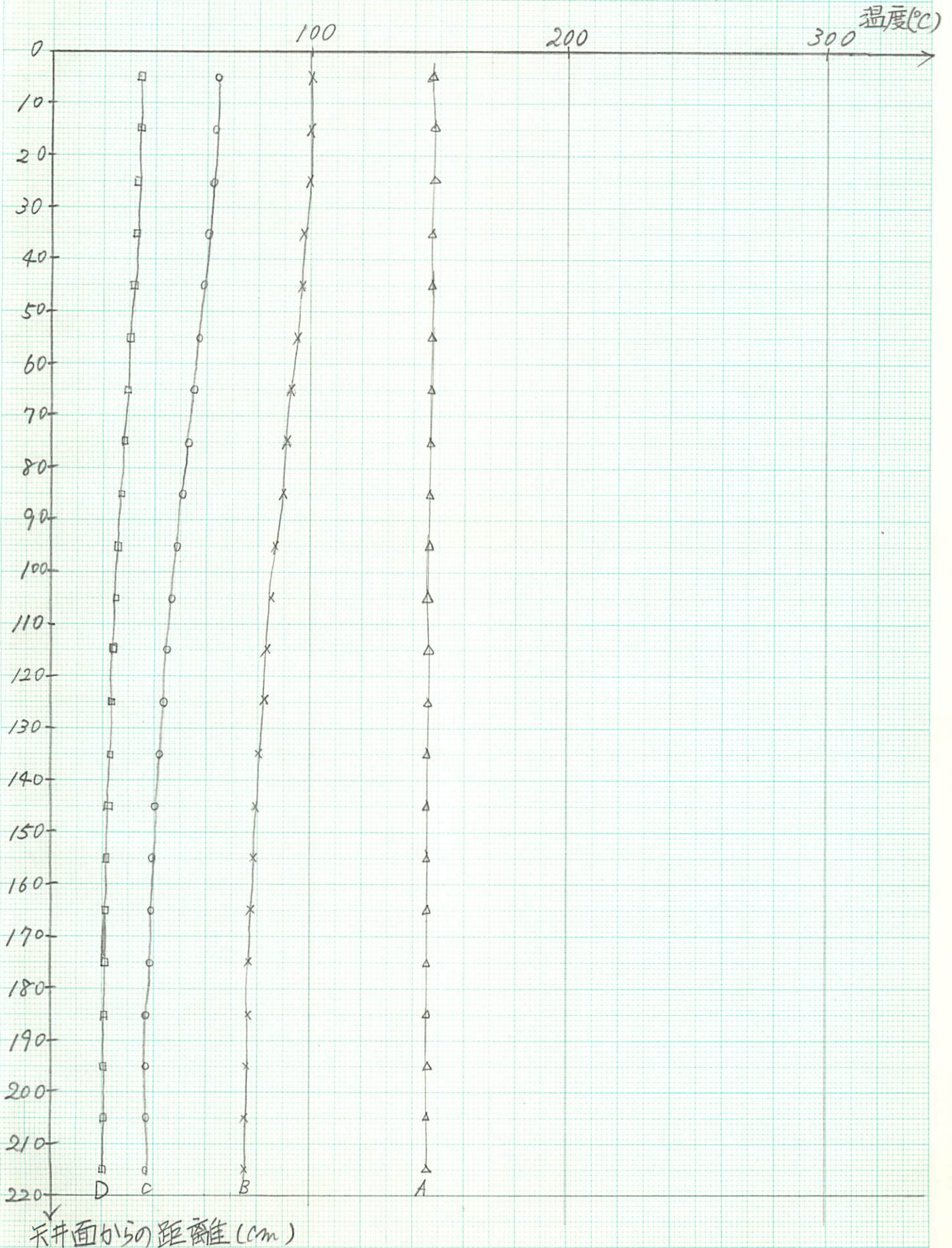


図. 6-5 a

② 火源温度 900 (K) のときの温度分布

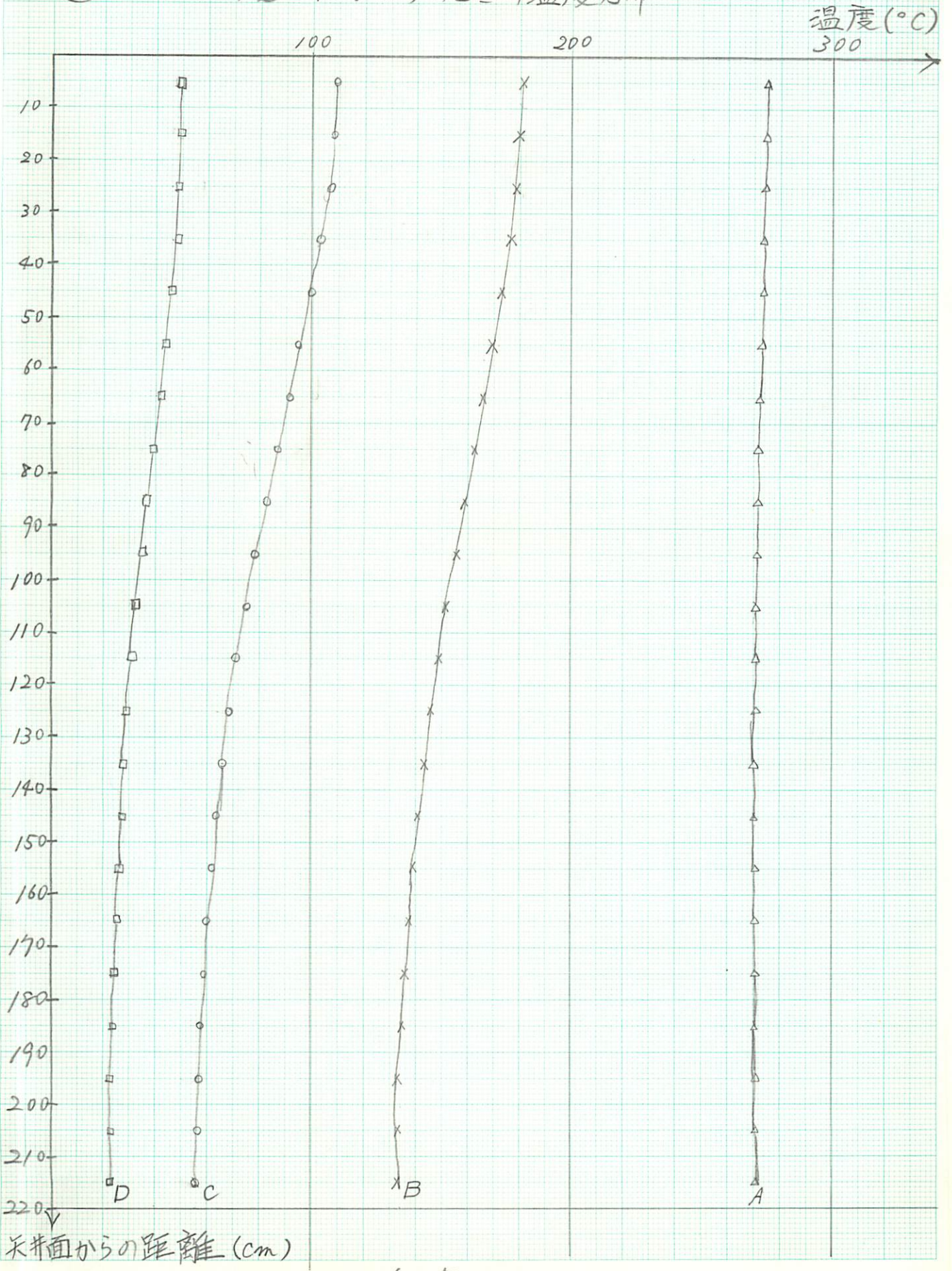


図. 6-5b

③ 火源温度 1200 (K) のときの温度分布

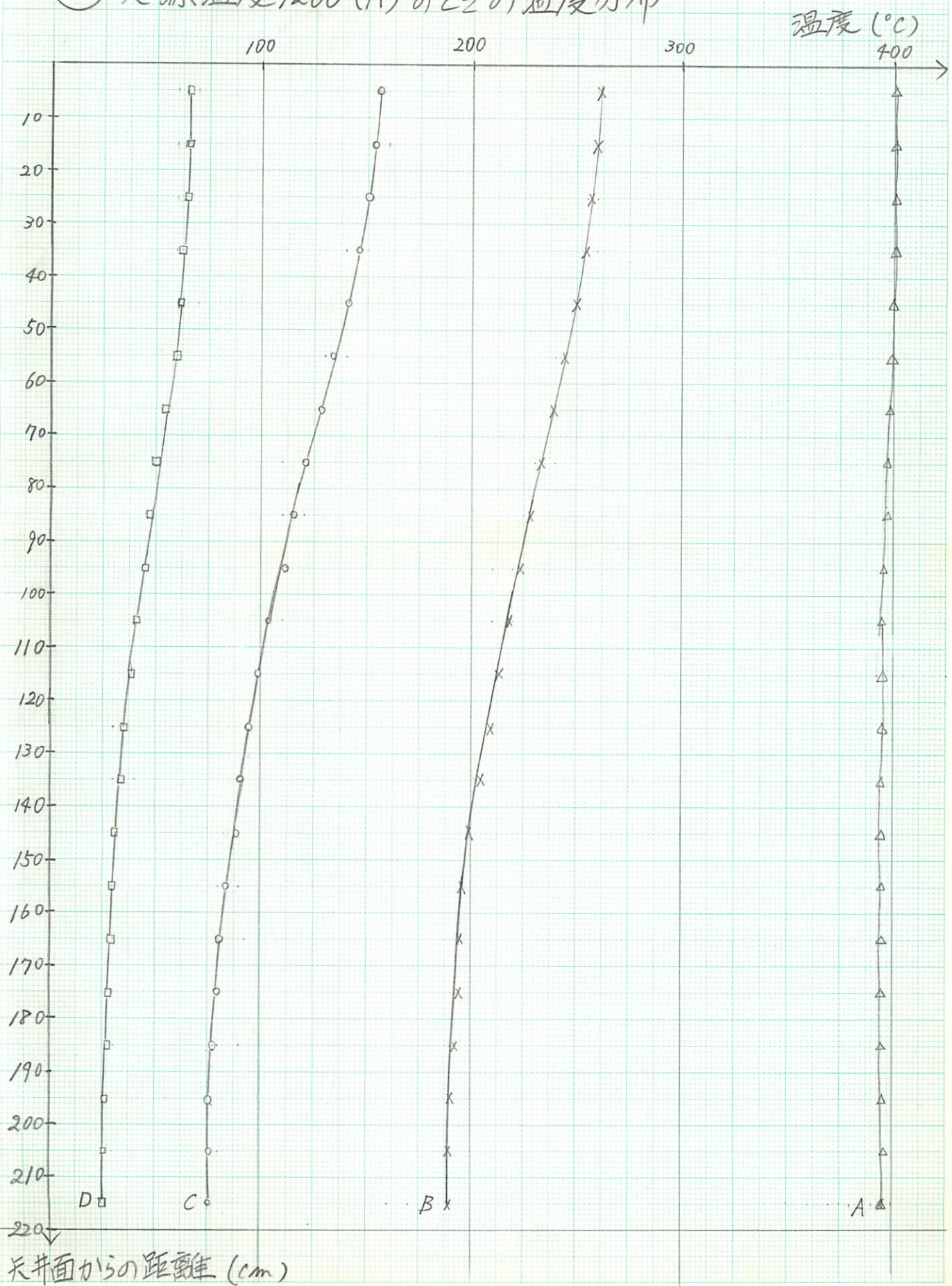


図. 6-5c

2-2. 考察

さて、それでは、項目別に結果をみていくことにしよう。

(1) 風速分布.

先ず図6-3を見ていただきたい。第一に、風速の大きさは、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ と増加していきDで減少する。ここで、特徴的なことは、風速が速くなるにつれて、その中立点（速度の方向が逆転する高さ）が高くなっていくという点である。そして、このことに対応するように、速度は、天井側で大きくなっていく。

次に、図6-4を御覧いただきたい。これらは、図6-3と同じものを、各測定点において火源の温度別にプロットしたものであるが、温度変化による風速の変化は、あまり大きくないようである。又、温度が高くなるほど、風速の増加度は減少していることがわかる。これは水平路の場合も同様のようである。

またこのことは、数値計算一般に言えることであるが、この斜路の場合も、風速分布はなめらかな曲線で結ばれている。ところが、水平路の場合、実際の実験結果では、上下の層の境界において不連続的に風速が変化している。斜路の場合においては、実際^の風速分布のデータがないので、何とも言えないが、ここらへんのところが、この

数値計算の弱みであると言われている。

さて次に、斜路の場合と、水平路の場合とでは ㄥ のような違いがあるのかをみてみよう。図 6-6 を御覧ください。これは、水平路の場合と斜路の場合とを 1 つのグラフにまとめ、比較したものであるが、これより、B 点でも、C 点でも流線図のとこでも述べたようにほぼ等しいと速度が遅くなっているのがわかるであろう。またもう一つ特徴的なことは、中点点がかなり高めにくさということである。この速度が遅くなっているというこは、

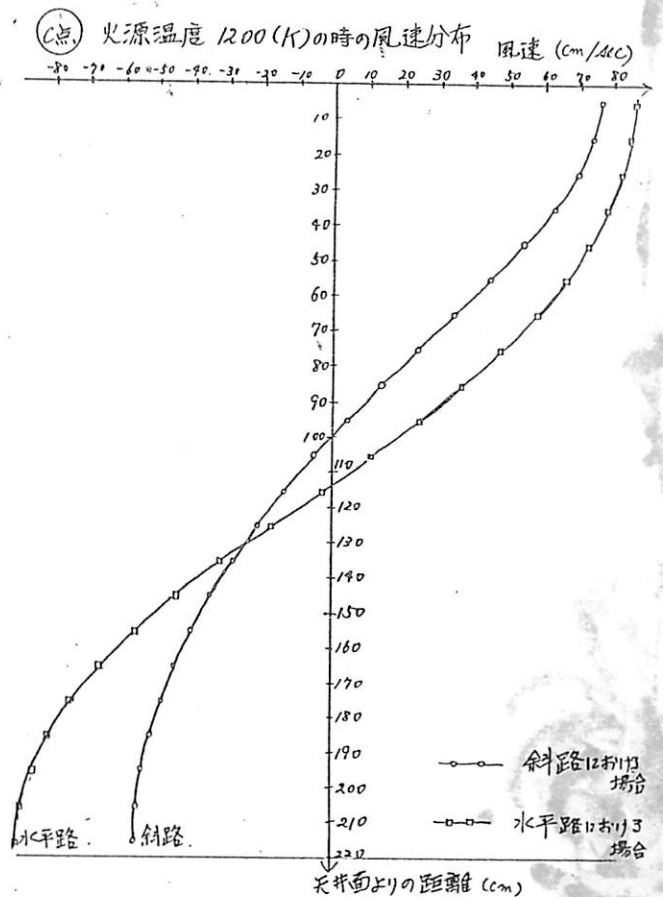
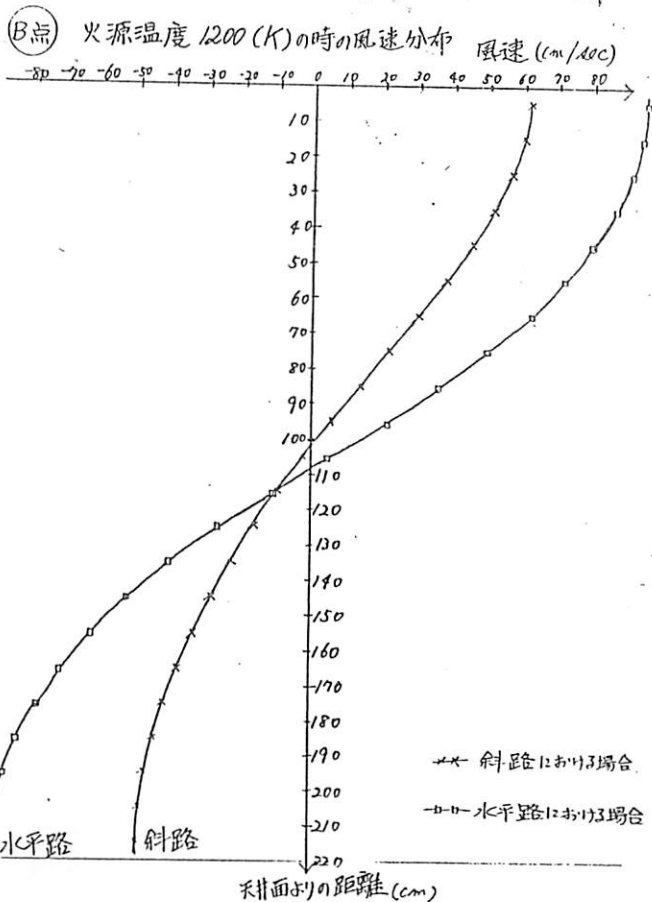


図. 6-6

温度分布とも密接に関連していると思われるので、こちらの方でも述べることにしたい。

(2) 温度分布

さて、表6-3及び図6-5を御覧いただきたい。これらより先ず言えることは、上下の温度差があまりみられないということである。特にA点などでは、ほとんど変化がみられない。このことは、座標軸を鉛直方向にはではなく、図の6-7のように傾けてとってあること、又斜めにしたことによつて、床面付近の空気も暖たまりやすくなっているためでもあると思われる。

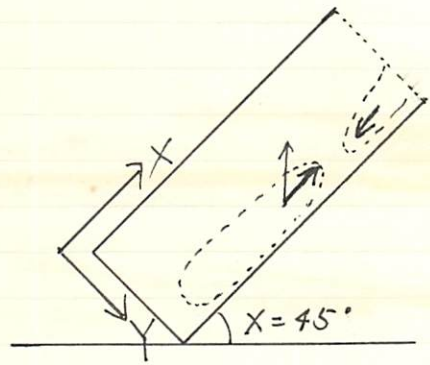


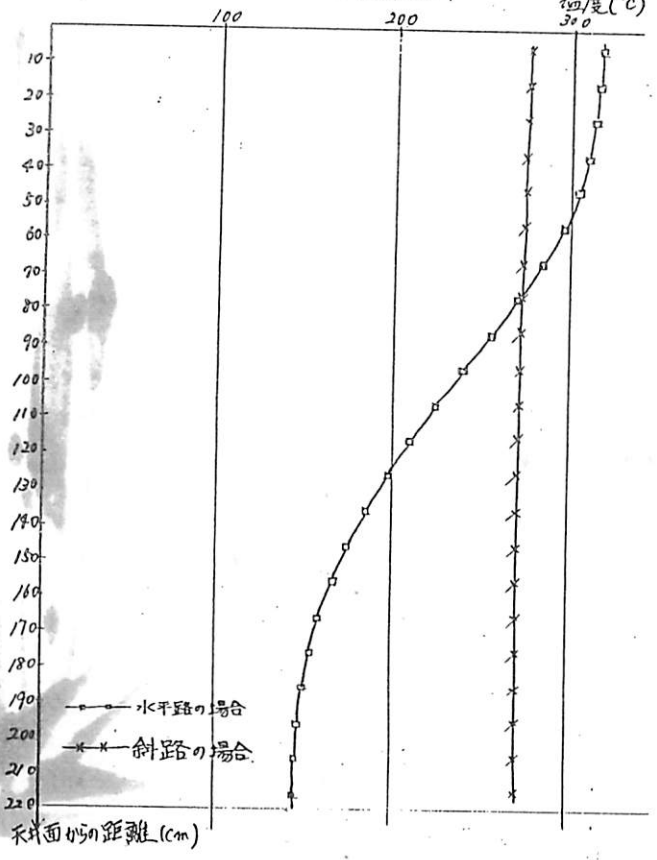
図6-7.

さて、今度もまた、さきほど

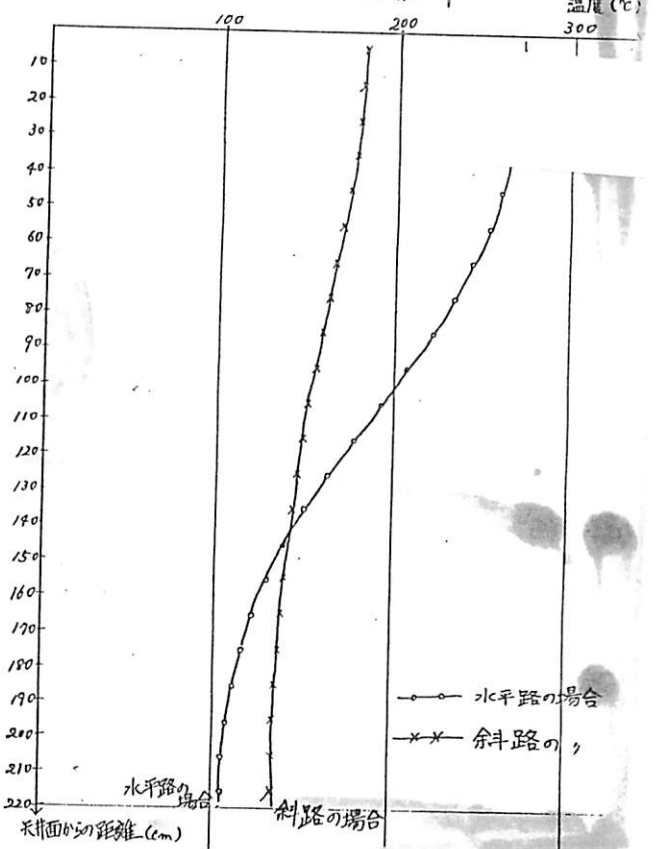
の風速分布と同様に、水平路の場合と比較してみよう。

それが、次ページの図6-8である。これらを見ると、今述べたようにA点、B点などでは、床面もかなり高い温度となっていることがわかる。このことから、床面近くの空気も、天井近くの空気と同様に浮力を受け、自由端から外へ出ようとする。(図6-7参照)よつて侵入しようとする外気の風速が減速され、それによつて全体の風速も遅くなるものと推察される。

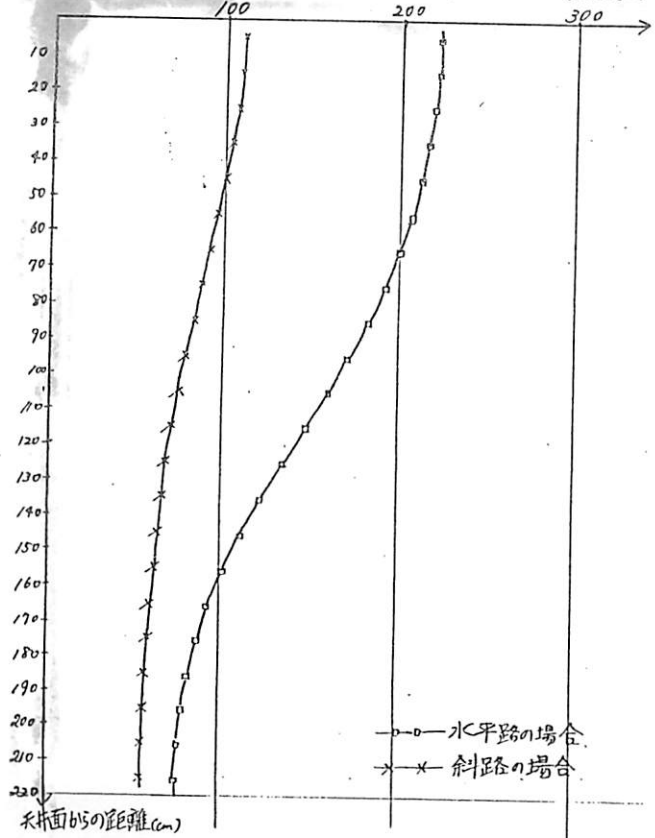
(A) 火源温度 900(K) のときの温度分布



(B) 火源温度 900(K) のときの温度分布



(C) 火源温度 900(K) のときの温度分布



(D) 火源温度 900(K) のときの温度分布

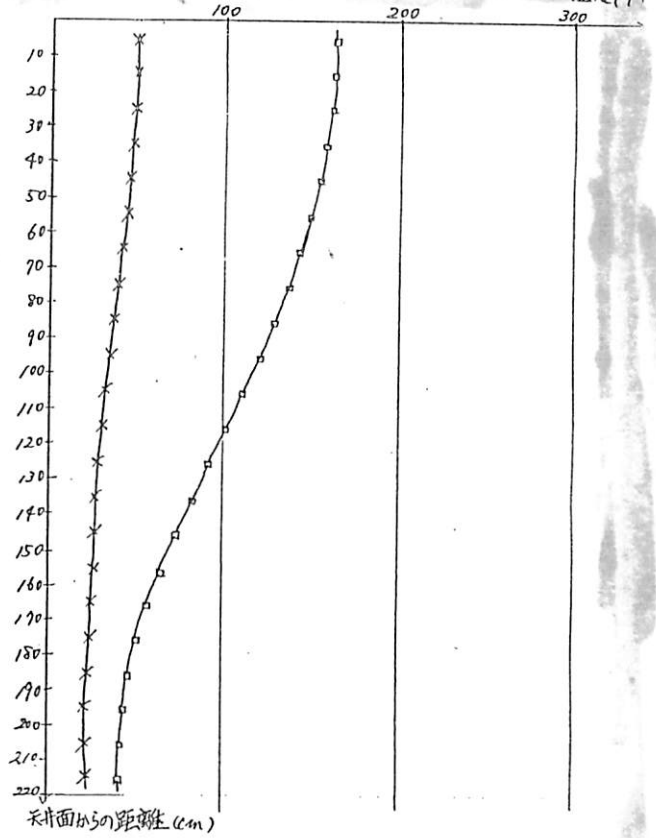


図 6-8 温度分布の比較

(3) 代表速度(V_0) に関して.

これは実験結果の考察とは少し異なるが、少し気になったので、コメントしておきたい。文献(1)のp. 153で辻本氏は、炎付近の微小気体塊が、天井面に達した時の速度が、

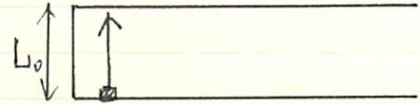


図.6-9

考えられる最大の速度でありこの速度を代表速度 V_0 として定めるとしている。と23で、文献(2)より

$$\frac{\rho V_0^2}{2} \approx g L_0 (\rho_a - \rho) \quad (6-2-1)$$

$$\rho_a - \rho = \rho \beta (t - t_a) \quad (6-2-2)$$

ここで ρ, t : 微小気体塊の密度及びその温度

ρ_a, t_a : まわりの空気の密度及びその温度

β : 体膨張係数.

(6-2-1), (6-2-2) より

$$\rho \frac{V_0^2}{2} = g L_0 \rho \beta (t - t_a) \quad (6-2-3)$$

$$\therefore V_0 = \sqrt{2 g L_0 \beta (t - t_a)} \quad (6-2-4)$$

となり $\sqrt{g \beta L_0 \Delta \theta}$ の $\sqrt{2}$ 倍となるのではないだろうか。もちろん粘性等により(6-2-1)が完全に成り立つとは限らないが、考えうる最大の速度は(6-2-4)のようになるのではないだろうか。又45°傾ければ、考えうる最大の速度

は、(6-2-4)の $\sqrt{2}$ 倍となり、最初の $2^{\frac{3}{2}}$ 倍になるものと思われる。ただなぜか文献(2)においても最大の速度を

$$V_0 = \sqrt{g \beta L_0 (t - t_0)}$$

としているが……

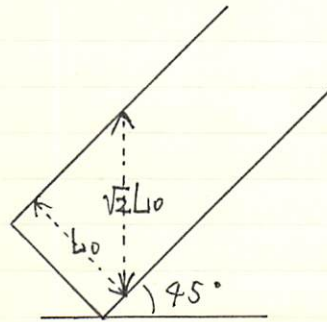


図. 6-10.

第3節. 境界条件.

境界条件については、第5章3-2の表5-1の条件を用いたわけであるが、これについて少し考察してみたいと思う。

3-1. 壁面の境界条件.

1). 温度 (TH)

i) 温度に関しては、 $TH_{\text{壁}} = TH_{\text{実}}$ なる断熱条件を用いた。水平路の数値実験の場合には、これ故に実測値と比べて、かなり高温となっているが⁽¹⁾、本実験においても、比較すべき実測値がないので云々できないが、かなり高温の値が出力されているのではないかと思われる。

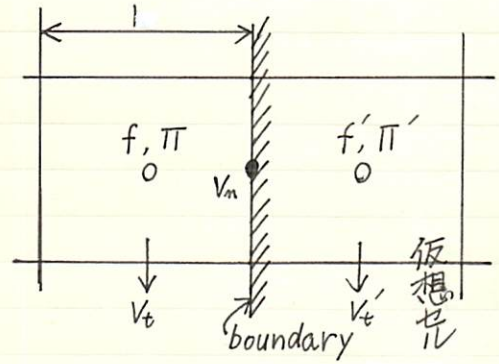
ii) ではこれを改善するためには、どのようにしたらよいかについては、「温度については、流体上の境界では濃度と同様にして考えることができるが、壁面上の境界に対しては輻射熱や伝導熱を考慮しなければならないので著しく複雑になる。」⁽⁸⁾ので、ここでは取上げないが、参考文献⁽¹⁰⁾のP.41~45にそれについて詳しく述べられているので、そちらを参照していただきたい。又模型実験を行なった場合については、模型室内の内壁温を境界値として与えたものが、最も実験値と一致したという報告がなされている。^{(10) P.5~6} これについての詳しい説明は、文

献(10)の第4章になされているのでそちらを参照願いたい。

その他、周壁を半無限のコンクリート体として扱う方法も考えられる。(文献(20)のp.101~102)

2). U, V, Q, E, ψ について

図.6-11のように、境界外に仮想セルを考え、境界周辺の諸量を定義する。但し、 f は



スカラー量 (~~g, e, \psi~~) で

ある。表.5-1の条件は、No-Slip 条件であり、

i) $v_m = 0, v_t' = -v_t, f' = -f$

と表わされる。これは、境界の速度が0という条件が導入されているようにみえるが、しかし、例えばこの場合、

図.6-12のように dU/dY (dV/dX) 等の値が、現実の値とかけ離れてくる。そこで、この点を考慮したものが次の

ii) Wall boundary

$v_m = 0, v_t' = \frac{5}{7} v_t, g' = g,$

$$\varepsilon = \frac{2C_0^{\frac{3}{4}}}{k h} g^{\frac{3}{2}}$$

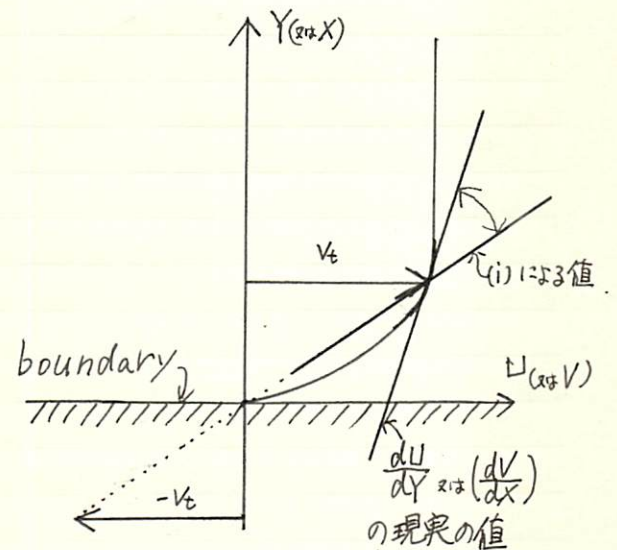


図.6-12.

(ただし、 k はカルマン定数)

という条件で、境界層理論における奇乗則等の法則が考

慮されている。(8)次回に数値実験を行なう場合は、この条件を用いてみるとよいと思われる。この条件についての詳しい説明は、文献(10)のP. 37~41に掲載されている。

3-2. 自由端の境界条件.

さて次に自由端についてであるが、表.5-1 について少しコメントしておくことにする。先ず、 θ, Q, E, D については、風向きによって変化する。 $U(IM, J) \geq 0$ のとき、則ち流出する時においては、比較的自然にこのような条件がでてくると思われる。ところが流入する場合は、そう簡単にいかない。 Q の場合は、自由乱流の考え方に基ずいている。すなわち、どんなに乱れが小さいものでも、 U の 1% 程度の乱れは存在するものという仮定に基づいて定めたものである。又 E の値は、噴流の場合を想定している。最後に少し気になるのは、 V の値である。実際にこうなるのであろうか。これについて以下のような考察、試算を試してみたい。

先ず水平路における場合で
図.6-13 のように流出する場合
を考えてみよう。ここで流体

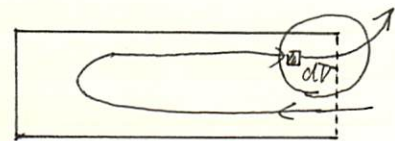


図.6-13

中のある体積素片 dV についての運動方程式を考えてみよう。(これはいわゆるラグランジュ的方法と言えるであ

ろう。)さて、この体積素片は、温度の関数として浮力を受けるわけであるか(前節

2-2(3)参照)、流出しようとして

いる空気(又は煙)全体

に働き、かつ上から天井で抱

束されているので、自由端の

境界の内側では、強く働かな

いものと考え、これから外へ出た瞬間に、図.6-14のよう

に、浮力によるポテンシャル(ここでは浮力場と呼ぶこ

とにする。)が働き、Y方向に変化を及ぼすものとする。

あとは、高校の物理工の範囲で話が進められる。

体積素片が (IM, J) と $(IM+1, J)$ の中間点、則ち自由端境界片から $(IM+1, J)$ まで達する時間 ΔT は、

$$\Delta T = \frac{DX/2}{U(IM, J)} \quad (6-3-1)$$

この間に V は

$$V(IM+1, J) = V(IM, J) + A \Delta T^*_{(注1)} \quad (6-3-2)$$

の関係で変化する。ここで $A, \Delta T^*$ はそれぞれ、無次元加速度、無次元時間である。

さて単位体積に働く力 F_y は、

(注1) 一般に、 $v = v_0 + at$ の関係があるが、無次元化して

も、この関係は保たれることがわかる。

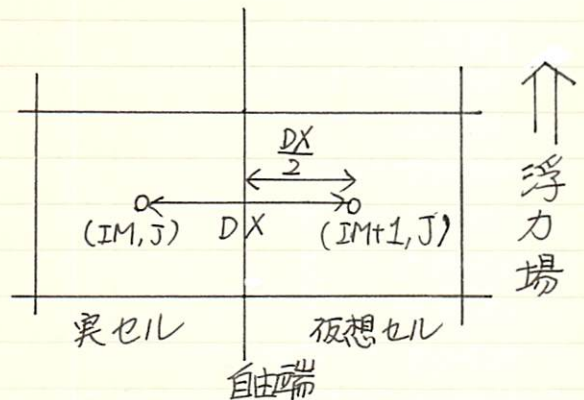


図.6-14 自由端近傍のセル

$$F_y = (\rho_a - \rho) g \quad (6-3-3)$$

と表わされる。よって

$$\rho a = (\rho_a - \rho) g \quad (6-3-4)$$

$$a = \frac{\rho_a - \rho}{\rho} g \quad (6-3-5)$$

$$A = \frac{a}{\frac{L_0 V_0^2}{L_0^2}} = \frac{a L_0}{V_0^2} \quad (6-3-6)$$

L_0 : 基準長さ, V_0 : 基準速度

さてこの A を (6-3-2) に代入して、 $V(IM+1, J)$ の値を求めるのであるが、ここで問題となるのは、 ADT^* の大きさである。これが $V(IM, J)$ に比べて無視できる程度であれば $V(IM+1, J) = V(IM, J)$ として差しつかえないであろう。以下数値を代入して概算してみると。

- ・ 火源温度 $THIN = 1200$ (K) のときを考える。
- ・ $K = 20000$ の時点 (定常解) で考える。

$$\begin{aligned} \rho_a - \rho &= \rho \cdot \beta (T - T_a) \\ &= \rho \cdot \frac{1}{THIN} (T - T_a) \\ &= 0.797 \cdot \frac{1}{1200} \cdot 148.33 \times 10^{-3} \\ &= 0.09854 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{T} = \frac{349.4 \times 10^{-3}}{438.3} \\ &= 0.797 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$1.2048 = \frac{\rho_0}{290} \quad \text{よ')}$$

$$\rho_0 = 349.4 \times 10^{-3}$$

無次元温度 $TH = 0.163$ を用いる、有次元化すると

$$\frac{\theta - 290}{910} = 0.163 \quad \text{より} \quad \theta = 438.3 (=T)$$

$$T - T_a = 148.33$$

(6-3-5) より

$$a = \frac{0.0985}{0.797} \times 980 = \frac{96.53}{0.797} = 121$$

(6-3-6) より

$$A = \frac{0.1236 \times 980 \times 220}{404^2} = 0.16325$$

$$dT = \frac{0.09091/2 \times 220}{137.8} = 3.299 \times 10^{-7} \times 220 = 0.0726$$

$$U = 404 \times 0.341 = 137.8$$

$$DT^* = \frac{dT}{L_0/V_0} = \frac{(3.299 \times 10^{-7}) \times (404)}{220} = 0.1333$$

$$A \cdot DT^* = 0.163 \times 0.1333 = 0.0217$$

$$V(IM, J) = 0.0118$$

であるからこれは無視できないと言えよう。斜路においてはこれに $\cos X$ をかければよい。そこで、今度の数値実験においては、この仮定を用いてやってみたい。

しかしながら、これにも1つ大きな問題がある。それは、流入側の条件をどのように設定したらよいのかという問題である。こちらの場合においては、以上のような簡単な論理では取り扱えそうもなさそうであるからであ

る。

ところで本論文では、 $V(IM+1, J) = V(IM, J)$ として V を決め、仮想セルにおいて連続の式をみ直すように $U(IM+1, J)$ を決定している。

$$V \xrightarrow{\text{連続の式}} U \quad (a)$$

これに対し、遠藤⁽²⁹⁾らは、

$$V' = V \text{ とし、 } \Pi' = \text{const} \text{ を与え } \Pi' \xrightarrow{\text{運動方程式}} U \quad (b)$$

これから運動方程式によっ

図. 6-15

て U を決定する方法で、実

際の流れと比較的よく一致した計算結果を得ている。

$$\Pi' = \text{const}, \quad v'_e = v_e, \quad f' = f$$

という条件である。

いずれにしても、この自由端の境界は、「本来物理的な条件を与えられるようなところではなく、そもそも境界を設定すること自体が誤りと思えるが、数値実験では何か条件を与えない限り解けないので与えているに過ぎない。」^{(40) p.38} ということで、模型実験との比較をしながら、適当な境界条件をみつけていくことが今後の課題と言えよう。

炎の境界条件については、今回は深く検討できなかったため、お許しいただきたい。

第4節. その他の考察.

4-1. 圧縮性について

本論文においては、気体を非圧縮性のものと考え、浮力を考える時のみ密度変化を考慮するという Boussinesq の近似を用いている。このような近似は、冷暖房ぐらゐの温度差の小さい場合には有効と考えられるが、火災気流のように温度勾配が大きい場合には、気体を圧縮性と考えて解析した方がよいと思われる。この方法については、文献(1)の P. 120~147、文献(20)を参照願いたい。

4-2. 定常解について

文献(9)の P. 9212 は、乱流の特徴があげられており、それに続いて、「ここで注目しなければならないのは、iv)の性質(3次元的な渦動変動)である。なぜならば、2次元の $N-S$ 方程式を非常に細かい格子網でもって解析し、不規則、非定常な解を得ることができたとしても、それは自然界に存在する乱流とは、性質が異なることになるからである。つまり、 $N-S$ 方程式だけの2次元解析では、定常解(層流)以外は無意味な解であると考えられる。」とある。本実験では、 $K=13016$ で Poisson の方程式が、発散してしまって、斜路の場合においては定常解が得られなかった。ただ、本数値実験では、 $N-S$ 方程

式だけでなく、 ρ と ϵ の輸送方程式も用いているので、このことが、そのまま当てはまるのかどうかは（現段階の私の理解度においては）判断しかねるが、坂本雄三氏（建設省建築研究所）は、「定常解じゃないと、何とも言えないんだがねえ…」（私が直接聞いた）と言われたところを見ると、定常解でなければ、意味をもたない公算が強い。

4-3、今後の課題

- i) 4-2のような状態なので、先ず第1にしなければならぬのは、時間ステップを進めて定常解を求めることであろう。K=KSTEPをもう少し長く行なってから乱流計算に入るか、スキームを改善するという方向が考えられる。
- ii) 3節でも述べたが、境界条件の検討をすること。これが一番大きな課題となってくるだろう。しかし、これをやるにはどうしても模型実験等を行ない、その実測値との比較検討が必要となってくると思われる。
- iii) 地下鉄に乗ろうとして、階段を下りると、階段の中を下の方から風が吹き抜けてゆくのを感じることもある。このような場合を想定を想定して、図.6-16のように、両端を開放して、階段内に風が流れるような条件

を設定して数値実験を行うこと。

この場合自由端の境界条件は、数値実験の評価を定量的に行なうためには、模型実験等の実測値を用いたい。次のステップとしては、実際に促して(b)のように階段等もつけた場合における実験であろう。

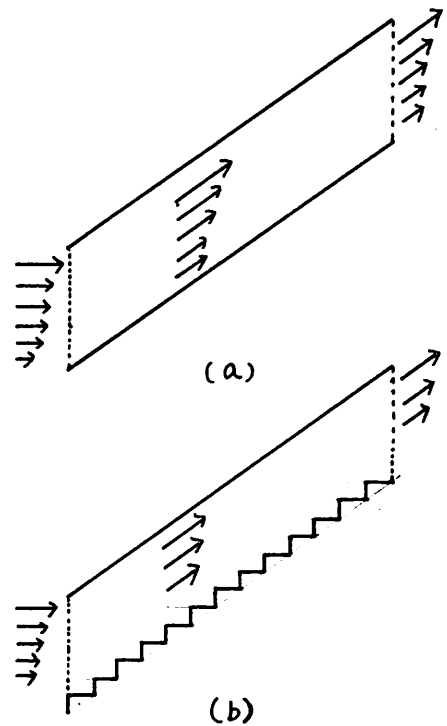


図. 6-16.

iv)これはすべての場合でいえることであるが、汚染物質の拡散方程式を用いて、その拡散の様相を解析すること。またそれを濃度の違いがわかるようにグラフィックにして出力すること。このことは、火災による死者が、煙によるものがほとんどであるということを考えると、最も必要な問題といえるかも知れない。本論文においても、こゝち方面に手をつけておくべきであらうと思っている次第である。

参考文献

- 1) 辻本稔 : 火災時の煙流動に関する実験的研究—廊下を流れる煙の数値解析に関して—(卒論, 1977)
- 2) Yogesh Jaluria : Natural Convection (HMT, Pergamon Press)
- 3) 野村豪, 貝塚正光 : 室内空気分布の数値解法について(空気調和・衛生工学, 第48巻 第10号)
- 4) 内田茂男 : 粘性流体力学(名古屋大学工学部, 航空学教室)
- 5) 野村豪, 松尾陽, 貝塚正光, 坂本雄三, 遠藤清尊 : 室内空気分布の数値解法に関する研究3, (日本建築学会論文報告集 238号, 1975)
- 6) 日野幹雄 : 流体力学(朝倉書店, 1974)
- 7) B.E. Launder and D.B. Spalding : Mathematical Models of Turbulence (Academic Press, 1972)
- 8) 坂本雄三 : 建物近傍および室内における拡散の数値計算(空気清浄第15巻 第6号, 1977)
- 9) 坂本雄三 : 室内空気分布の数値解法に関する基礎的研究(修士論文, 1975)

- 10) 坂本雄三 : 室内空気分布の数値解法に関する研究
(博士論文, 1977)
- 11) F.H. Harlow and P.I. Nakayama : Turbulence Transport Equations, (*The physics of Fluids*, Vol.10, 1967)
- 12) F.H. Harlow and P.I. Nakayama : Transport of Turbulence Energy Decay Rate (Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3854, 1968)
- 13) A.A. Amsden and F.H. Harlow : Transport of Turbulence in Numerical Fluid Dynamics, (*Journal of Computational Physics* Vol.3 1968)
- 14) 坂本雄三, 松尾陽 : 2方程式モデルによる乱流境界層の数値実験 (日本建築学会大会学術講演梗概集, 4089, s.51)
- 15) B.J. Daly & F.H. Harlow : Transport Equations in Turbulence (*The physics of Fluid*, vol.13, 2634, 1970)
- 16) A.C. Мошин, A.M. ЯГЛОМ : 統計流体力学 (山田豊一, 中野徹訳, 文一総合出版, 1965~)
- 17) G.D. スミス : 電算機による偏微分方程式の解法 (藤川洋一郎訳, サイエンス社, 1965)
- 18) 谷一郎 : 流体力学 岩波全書 (岩波書店, 1967)
- 19) 遠藤清尊他 : 乱流の数値解析と風洞実験, 日本建築

学会論文報告集 252号 (1977).

- 20) Yuji Hasemi "Numerical Simulation of the Natural Convection in Fire Compartment" Building Research Institute, Ministry of Construction.
- 21) 辻本誠 : 火災時の建物内煙流動に関する研究 (修士論文, 1976年2月)
- 22) F. H. Harlow and J. E. Welch, Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface (The physics of Fluid Vol. 8 (1965) 2182~2189)

あとがき

本研究は、辻本総氏の行なった、水平路における火災気流の数値実験を斜路に応用したものである。その基本となる流体力学や数値解析に関する基礎知識のほとんどないような状態より出発したため、1年間にはあまりにも短かく、あまりこの研究を発展させることができなかった。今になって、何が問題であるのか、どこに問題があるのか、ということがやっとわかりかけてきた。これからすこし本格的なことができるという、こういう時点で終わらなければならないことは、まことに残念である。

本論文を読まれた方が、これを進めてくれることを期待する次第である。

さて、今こうして、あとがきを書きながら、この研究に携わった感想・反省をすこし述べてみようと思う。第1に、このテーマは、むずかしくはあったが、非常に興味を持って楽しかったということである。乱流の研究をするめにたとえた人がいるそうだが、なるほどかめばかむほど味わいの出てくるものである。第2に、電子計算機の実力が想像していたよりも限られたものであることを実感した。「最近の電子計算機の著しい発達によって---」という、よく用いられるこのような言葉から僕は、(厳

密な形の基礎方程式を用い、地下街やビルの階段室等の内部空間などのような複雑な形状をした空間に対しても、そのまま正確に電算機ははじき出してしまおう)といったような幻想を抱いていたのであるが、ところがど、こい、乱流というのは何ともやっかいで、複雑なもので、数々の仮定、近似等を用いても、なかなかどうして一筋縄ではいかないことがわかってきた。第3番目としては、論文の収集にも、と早めに着手すべきであったということである。今年に入って、坂本さんの修士論文⁽⁹⁾、博士論文⁽¹⁰⁾を入手できたが、これによって境界条件その他の概念の理解がだいぶ深まったからである。第4に、これは最も残念なことであったが、斜路の場合において $K=130/6$ においてポアソンの方程式が発散してしまって定常解が得られなかったことである。第Ⅳ章 4-3 でも述べたが、これが今後の最初の課題であろう。

さて最後に、指導教官である、辻本助教授の要所々々を衝いた御指導と御助言を受けたことを心から感謝する次第である。例えばプログラムの理解、改編においては、「先ずフローチャートを書け!」「それを一目でわかるように、つなげて壁に貼れ!」「その意味を横の空白に書き込め!」といった具合である。私がしまだこ、ちの

もとの論文さえしっかり理解してないのに……)と思いつつも(先生に言われたのだから、しかたがない)と思っ
てやってみると、意外とできてくるのである。もし、
あのまま自分のペースでやっていたら、今に至るも、あ
の長大なプログラムを理解し、それを斜路の場合に改編
できなかったのではないかと思うのである。又、文献(1)
の著者である辻本総氏、建築研究所の坂本氏には、忙し
いなか私の稚拙な質問に対して御指導をいただいた。西
氏にも、記して謝意を表する次第である。

始め

COMMON文 } 宣言
DIMENSION文 }

U, V, TH等の各変数の初期
値設定

DATA文等による定数等の決定

IM, IN, NMAX, KMAX, KORD, KSTEP
ACCEL, EPS, DT, DO の入力

DX Y等の記号の約束

$T \leftarrow 0.0$
 $K \leftarrow 0.0$

$K = KSTEP$ までの渦動粘性係数
DOを各メッシュに与える。

FILE 31~33 からの入力
31: U, V, TH, P
32: Q, E, FN, GN
33: H, F, G, K

V, U, THの境界条件の
設定

Sの算出 (4-2-13)

Yes
No
 $K < KSTEP?$

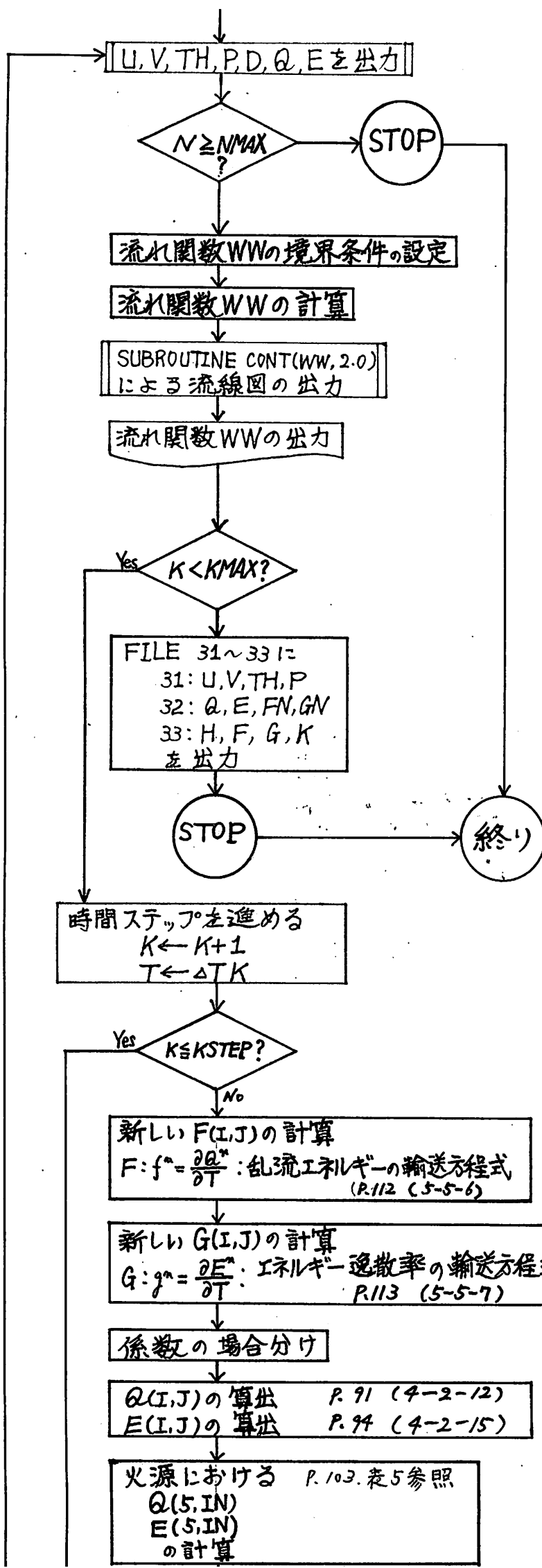
Dの計算 (4-2-16)

Q & U, Eの境界条件

Dの境界条件

格子点における渦動粘性係数DD
の算出(まわりの4点の平均をとる)

$MOD(K, KORD) \neq 0$
?
No



U, V, TH, P, D, Q, E を出力

$N \geq NMAX$?

STOP

流れ関数 WW の境界条件の設定

流れ関数 WW の計算

SUBROUTINE CONT(WW, 2.0)
による流線図の出力

流れ関数 WW の出力

$K < KMAX$?

FILE 31~33 に
31: U, V, TH, P
32: Q, E, FN, GN
33: H, F, G, K
を出力

STOP

終り

時間ステップを進める
 $K \leftarrow K+1$
 $T \leftarrow \Delta TK$

$K \geq KSTEP$?

新しい F(I, J) の計算
 $F: f^n = \frac{\partial Q^n}{\partial T}$: 乱流エネルギーの輸送方程式
(P.112 (5-5-6))

新しい G(I, J) の計算
 $G: g^n = \frac{\partial E^n}{\partial T}$: エネルギー逸散率の輸送方程式
P.113 (5-5-7)

係数の場合分け

Q(I, J) の算出 P. 91 (4-2-12)
E(I, J) の算出 P. 94 (4-2-15)

火源における P. 103. 表 5 参照
Q(5, IN)
E(5, IN)
の計算

AL: L^m の計算 P.81 (4-2-2)

AM: M^m の計算 P.84 (4-2-6)

R(I,J) の計算

$N \leftarrow 0$

$N \leftarrow N+1$

今までの $P(I,J)$ を $PN(I,J)$ とおき
新しい $P(I,J)$ を計算する。加速緩和法

$$DP = \sum |P(I,J) - PN(I,J)|$$

DP < ϵ ?

Yes

No

$N \geq NMAX$?

No

Yes

DP, K を出力

今までの $FN(f^m)$ を $FT(f^{m+1})$ とおき新しい FN を計算する。
P.90 (4-2-11)
今までの $GN(g^m)$ を $GT(g^{m+1})$ とおき新しい GN を計算する。
P.93 (4-2-14)

今までの $H(H^m)$ を $HT(H^{m+1})$ とおき新しい H を計算する。P.111 (5-5-5)

TH(I,J) を計算する。P.88 (4-2-10)

V(I,J) を計算する。P.85 (4-2-8)
U(I,J) を計算する。P.82 (4-2-4)

各ステップにおける出力
 $N, K, U(IM, 2), U(5, IN), V(5, 8), TH(IM, 2), DP$
を出力